computing@tanet.edu.te.ua
www.tanet.edu.te.ua/computing

ISSN 1727-6209
International Scientific
Journal of Computing

# ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ У ВЕЛИКИХ ГНУЧКИХ СИСТЕМАХ

**Олена Муль [1)] [*], Д. Торреш [2)]**

[1)] Інститут комп'ютерних інформаційних технологій, Тернопільська академія народного господарства,
Площа Перемоги 3, 46004 Тернопіль, Україна, olena@mat.ua.pt
[*] Грант від FCT, стажування SFRH/BPD/14946/2004
[2)] Department of Mathematics, University of Aveiro, 3810-193 Aveiro, Portugal, delfim@mat.ua.pt,
http://www.mat.ua.pt/delfim

**Резюме:** *Розглянуто математичну модель реальної гнучкої пружної системи з розподіленими та дискретними параметрами, яка являє собою рівняння у частинних похідних з некласичними граничними умовами. Складність граничних умов робить неможливим знаходження точного аналітичного розв'язку такої граничної задачі, у зв'язку із чим для досліджень використано чисельний метод нормальних фундаментальних систем розв'язків. Досліджено залежність частот можливих коливань від різних фізичних параметрів системи. Показано, що введення в систему зворотнього зв'язку за швидкістю з визначеними значеннями коефіцієнту зворотнього зв'язку дозволяє контролювати частотний спектр, в якому можливе збудження коливань.*

**Ключові слова:** – *системи з розподіленими та дискретними параметрами, коливання, чисельні методи.*

## 1. ВСТУП

На сьогоднішній день динамічні системи з розподіленими та дискретними параметрами є поширеними у важкій, гірничодобувній і переробній промисловості, а також у космічній техніці [1-4]. У таких системах можуть виникати різні складні динамічні процеси, у тому числі і вібрації, які завжди негативно впливають на нормальне функціонування, а деколи навіть можуть привести до руйнування системи.

Тому метою даного дослідження є вивчення можливих вібрацій у таких динамічних системах з розподіленими та дискретними параметрами, як космічні літаючі апарати великих габаритів з гнучкими пружними елементами, а також пошук можливостей зменшення шкідливої дії коливань на функціонування таких систем.

Технічні вимоги до космічних літаючих апаратів (наприклад, щодо регулювання форми та точності орієнтування космічних антен) передбачають, що у таких гнучких конструкціях неприпустиме виникнення інтенсивних вібрацій. Для уникнення вібрацій у технічних системах, як правило, використовують пасивне демпфування коливань, однак жорсткі технічні вимоги до космічних апаратів обумовлюють інші методи боротьби з вібраціями.

Тому останнім часом розробляються різні системи активного контролю коливань [1]. При цьому необхідно розв'язувати ряд задач, серед яких розробка стратегій систем активного демпфування вібрацій великих гнучких конструкцій. У найпростіших випадках достатньо ввести контури місцевого зворотнього зв'язку за швидкістю, але часто необхідно розглядати більш складні системи управління, у тому числі і адаптивні. Крім того, потребують вирішення проблеми практичної реалізації законів керування з використанням цифрових систем управління, а також впливу динаміки силових виконавчих механізмів на зміну динамічних властивостей великих гнучких конструкцій тощо.

У даній роботі вивчається стійкість реальної гнучкої пружної конструкції як системи з розподіленими параметрами, а також вплив активного керування на динамічні характеристики такої конструкції.

Відомі спроби дослідити стійкість гнучкої пружної конструкції з використанням математичних моделей систем лише з дискретними параметрами [1, 4]. Цілком зрозуміло, що одержані при цьому результати не були достатньо точними. Натомість, при врахуванні розподілених параметрів конструкції математична модель має вигляд граничної задачі у диференціальних рівняннях в частинних похідних.

Для цієї нової моделі можливо розробити як асимптотичні, так і чисельні методи, які дозволяють перш за все визначити частоти можливих коливань, а також умови стійкості при активному контролі коливань [2, 3]. Аналіз впливу різних параметрів розглянутої системи дозволяє зробити висновки про її оптимальні параметри.

Результати даної роботи можуть бути використані у космічній інженерії при проектуванні нових покращених технічних систем.

## 2. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

В даній роботі проаналізовано гнучку пружну систему з розподіленими та дискретними параметрами.

Базова математична модель, що використовується для досліджень, відповідно до роботи [4] має вигляд:

$$\rho S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = ES\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t},$$

$$x = 0, \quad u(0,t) = 0,$$

$$\begin{aligned} x = L, \quad & mES\beta\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^3} + m(d+b)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \\ & + ES(m+\beta b)\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + mc\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \\ & + ES(b+\beta c)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + ESc\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

де $u(x,t)$ – зміщення точки стержня з абсцисою $x$, $S$ – площа перерізу стержня, $\rho$ – маса одиниці об'єму, $E$ – модуль Юнга, $\beta$ – коефіцієнт дисипації в матеріалі стержня, $b$ – коефіцієнт демпфування виконавчого механізму, $c$ – жорсткість центруючої пружини, $d$ – коефіцієнт зворотнього зв'язку, $m$ – пробна маса, $L$ – довжина пружного стержня.

Необхідно відзначити, що задача (1) є неконсервативною граничною задачею, що завжди спричиняє значні труднощі при визначенні точного аналітичного розв'язку. Неконсерватизм задачі спричиняється присутністю непарних похідних по часу як у рівнянні руху, так і у другій граничній умові. Це дозволяє припустити, що власні значення граничної задачі (1) є комплексними числами, що узгоджується з результатами, одержаними у роботах [1-3].

З метою врахування впливу різних параметрів системи на можливі коливання і спрощення деяких громіздких перетворень введемо наступні безрозмірні змінні

$$\bar{u} = \frac{u}{L}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{ta}{L} \tag{2}$$

та безрозмірні параметри

$$\begin{gathered} \varepsilon_1 = \frac{\beta a}{L}, \quad \mu = \frac{ba}{ES}, \quad \nu = \frac{da}{ES}, \\ \eta = \frac{m}{\rho SL}, \quad \delta = \frac{ES}{cL}, \end{gathered} \tag{3}$$

де $a^2 = \dfrac{E}{\rho}$.

Тоді граничну задачу (1) можна записати у безрозмірному вигляді:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} = \varepsilon_1 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2 \partial \tau},$$

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{u}(0,\tau) = 0,$$

$$\begin{aligned} \bar{x} = 1, \quad & \varepsilon_1\eta\delta\frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \tau^3} + \eta\delta(\nu+\mu)\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \tau^3} + \\ & + \delta(\eta + \varepsilon_1\mu)\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \tau^2} + \eta\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \tau^2} + \\ & + (\varepsilon_1 + \mu\delta)\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \tau} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Математична модель (4) описує динамічні процеси у системі з розподіленими параметрами. Тому природньо припустити, що у такій системі стаціонарні режими роботи не завжди є одночастотними [1].

## 3. ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД

В даній роботі для визначення власних значень граничної задачі (4) використано чисельний метод нормальних фундаментальних систем розв'язків.

Питання обгрунтування збіжності методу нормальних фундаментальних систем розв'язків та його точності при застосуванні до задач теорії коливань детально розглянуто у монографії [5].

Враховуючи, що власні значення є комплексними числами, розв'язок граничної задачі (4) будемо шукати у такій формі:

$$u(\overline{x},\tau)=\left[u_1(\overline{x})+iu_2(\overline{x})\right]e^{(q+i\omega)\tau}, \qquad (5)$$

де $q$ та $\omega$ – відповідно дійсна та уявна частини власних значень, що є константами і підлягають визначенню.

Після підстановки форми розв'язку (5) у граничну задачу (4), дійсна та уявна частини рівняння руху відповідно будуть:

$$\begin{aligned}&\left(q^2-\omega^2\right)u_1-2q\omega u_2-\\&\qquad-\left(1+\varepsilon_1 q\right)u_1''+\varepsilon_1\omega u_2''=0,\\&2q\omega u_1+\left(q^2-\omega^2\right)u_2-\\&\qquad-\varepsilon_1\omega u_1''-\left(1+\varepsilon_1 q\right)u_2''=0.\end{aligned} \qquad (6)$$

З метою забезпечення компактності подальших виразів будемо використовувати наступні позначення:

$$\begin{aligned}D_1&=\eta\left(q^2-\omega^2\right)+\eta\delta q^3(\nu+\mu)-\\&\quad-3\eta\delta q\omega^2(\nu+\mu),\\D_2&=-3\eta\delta q^2\omega(\nu+\mu)+\\&\quad+\eta\omega\left(\mu\delta\omega^2-2q+\nu\delta\omega^2\right),\\D_3&=\delta\left(q^2-\omega^2\right)\left(\varepsilon_1\mu+\eta\right)+\\&\quad+\varepsilon_1\eta\delta q\left(q^2-3\omega^2\right)+q\left(\mu\delta+\varepsilon_1\right)+1,\\D_4&=-\omega\left(\varepsilon_1+\mu\delta\right)+\\&\quad+\varepsilon_1\eta\delta\omega\left(\omega^2-3q^2\right)-2\delta q\omega\left(\eta+\varepsilon_1\mu\right).\end{aligned} \qquad (7)$$

Тоді граничні умови (4) після розділення їх дійсних та уявних частин можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}&\overline{x}=0,\quad u_1=u_2=0,\\&\overline{x}=1,\quad D_1u_1+D_2u_2+D_3u_1'+D_4u_2'=0,\\&\qquad -D_2u_1+D_1u_2-D_4u_1'+D_3u_2'=0.\end{aligned} \qquad (8)$$

Використання чисельного методу нормальних фундаментальних систем розв'язків вимагає представлення задачі у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку у нормальній формі, які задовільняють довільним заданим граничним умовам.

Тому, з метою зведення рівнянь (6) до необхідного вигляду введемо такі нові функції:

$$\gamma_1=u_1,\quad \gamma_2=u_2,\quad \gamma_3=u_3,\quad \gamma_4=u_4. \qquad (9)$$

Тоді необхідна система диференціальних рівнянь у нормальній формі може бути записана як

$$\begin{aligned}\gamma_1'&=\gamma_3,\\\gamma_2'&=\gamma_4,\\\gamma_3'&=K_1\gamma_1-K_2\gamma_2,\\\gamma_4'&=K_2\gamma_1+K_1\gamma_2.\end{aligned} \qquad (10)$$

де коефіцієнти $K_1$ та $K_2$ залежать від шуканих величин $q$ та $\omega$:

$$\begin{aligned}K_1&=\frac{q^2-\omega^2+\varepsilon_1 q\left(q^2+\omega^2\right)}{\left(1+\varepsilon_1 q\right)^2+\varepsilon_1^2\omega^2},\\K_2&=\frac{\left(2q+\varepsilon_1\left(q^2+\omega^2\right)\right)\omega}{\left(1+\varepsilon_1 q\right)^2+\varepsilon_1^2\omega^2}\gamma_2.\end{aligned} \qquad (11)$$

У нових функціях (9) граничні умови (8) можна перетворити до наступних:

$$\begin{aligned}&\overline{x}=0,\quad \gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=\gamma_4=0,\\&\overline{x}=1,\quad D_1\gamma_1+D_2\gamma_2+D_3\gamma_3+D_4\gamma_4=0,\\&\qquad -D_2\gamma_1+D_1\gamma_2-D_4\gamma_3+D_3\gamma_4=0.\end{aligned} \qquad (12)$$

Отже, тепер необхідно розв'язати граничну задачу (10), (12) у звичайних диференціальних рівняннях. За допомогою будь-якого чисельного методу, наприклад, методу Рунге-Кутта, необхідно чотири рази розв'язати задачу Коші для системи рівнянь (10) з наступними початковими умовами:

$$\gamma_{j,k}(0,\omega,q)=\begin{cases}1, & \text{при } k=j\\0, & \text{при } k\neq j\end{cases}, \qquad (13)$$

де перший нижній індекс функції $\gamma$ – це номер розв'язку, а другий – номер функції, $j,k=\overline{1,4}$.

В такий спосіб можна зформувати нормальну фундаментальну систему розв'язків $\left\{\gamma_{j,k}\left(\bar{x},\omega,q\right)\right\}_{j,k=1,2,3,4}$ для системи диференціальних рівнянь (10). З допомогою такої системи розв'язків загальний розв'язок $\gamma_k\left(\bar{x},\omega,q\right)$ системи (10) можна записати у вигляді:

$$\gamma_k\left(\bar{x},\omega,q\right)=\sum_{j=1}^{4}C_j\gamma_{j,k}\left(\bar{x},\omega,q\right), \qquad (14)$$

де $C_j$ – деякі коефіцієнти, які необхідно визначити.

Використовуючи властивість нормальної фундаментальної системи розв'язків

$$C_k=\gamma_k\left(0,\omega,q\right), \qquad (15)$$

де $k=\overline{1;4}$, з першої граничної умови (12) легко визначити, що $C_1=C_2=0$.

Тепер, задовільняючи другу граничну умову (12), одержимо два лінійних алгебраїчних рівняння відносно коефіцієнтів $C_3$, $C_4$:

$$\begin{aligned}&C_3E_1\left(1,\omega,q\right)+C_4E_2\left(1,\omega,q\right)=0,\\&C_3E_3\left(1,\omega,q\right)+C_4E_4\left(1,\omega,q\right)=0,\end{aligned} \qquad (16)$$

де коефіцієнти $E_s\left(1,\omega,q\right)$, $s=\overline{1;4}$, визначаються наступними формулами:

$$\begin{aligned}E_1\left(1,\omega,q\right)&=D_1\gamma_{3,1}(1)+D_2\gamma_{3,2}(1)+\\&\quad+D_3\gamma_{3,3}(1)+D_4\gamma_{3,4}(1),\\E_2\left(1,\omega,q\right)&=D_1\gamma_{4,1}(1)+D_2\gamma_{4,2}(1)+\\&\quad+D_3\gamma_{4,3}(1)+D_4\gamma_{4,4}(1),\\E_3\left(1,\omega,q\right)&=-D_2\gamma_{3,1}(1)+D_1\gamma_{3,2}(1)-\\&\quad-D_4\gamma_{3,3}(1)+D_3\gamma_{3,4}(1),\\E_4\left(1,\omega,q\right)&=-D_2\gamma_{4,1}(1)+D_1\gamma_{4,2}(1)-\\&\quad-D_4\gamma_{4,3}(1)+D_3\gamma_{4,4}(1).\end{aligned} \qquad (17)$$

Звідси, співвідношення

$$\Delta\left(\omega,q\right)=\begin{vmatrix}E_1\left(1,\omega,q\right) & E_2\left(1,\omega,q\right)\\ E_3\left(1,\omega,q\right) & E_4\left(1,\omega,q\right)\end{vmatrix}=0 \qquad (18)$$

є необхідною і достатньою умовою існування нетривіального розв'язку однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (16).

Це співвідношення є також необхідною і достатньою умовою існування нетривіального розв'язку граничної задачі (1). Воно є рівнянням відносно пари значень $q$ та $\omega$, які можна визначити як його корені. Таким чином, з рівняння (18) можна визначити також і комплексні власні значення $q+i\omega$ граничної задачі (4).

Необхідно також відзначити, що визначник $\Delta\left(\omega,q\right)$ із виразу (18) є завжди невід'ємним, що узгоджується з результатами, одержаними у роботі [3].

## 4. УТОЧНЕНИЙ МЕТОД

Цілком очевидно, що точність визначення власних значень розглянутої граничної задачі залежить від довжини інтервалу інтегрування для системи (10). Тому для зменшення похибки обчислень необхідно розбити інтервал інтегрування $[0;1]$ на деякі менші інтервали точками $\bar{x}=\bar{x}_i$, де $i=\overline{1,n-1}$, прийнявши $\bar{x}_0=0$, а $\bar{x}_n=1$.

Тоді розв'язки $\gamma_k\left(\bar{x},\omega,q\right)$ граничної задачі (10), (12) можна зформувати на відповідних підінтервалах за допомогою розв'язків $\gamma_k^{(i)}\left(\bar{x},\omega,q\right)$ систем рівнянь

$$\begin{aligned}&\left[\gamma_1^{(i)}\right]'=\gamma_3^{(i)},\\&\left[\gamma_2^{(i)}\right]'=\gamma_4^{(i)},\\&\left[\gamma_3^{(i)}\right]'=K_1\gamma_1^{(i)}-K_2\gamma_2^{(i)},\\&\left[\gamma_4^{(i)}\right]'=K_2\gamma_1^{(i)}+K_1\gamma_2^{(i)},\end{aligned} \qquad (19)$$

де нижній індекс функції $\gamma$ визначає номер розв'язку, а її верхній індекс – номер підінтервала, $i=\overline{1,n}$.

Розв'язки $\gamma_k^{(i)}(\bar{x},\omega,q)$ систем рівнянь (19) повинні задовільняти граничним умовам (12) та, крім того, деяким умовам спряження, які повинні зв'язувати їх на кінцях підінтервалів. Оскільки точки $\bar{x}_i$ розбиття інтервалу інтегрування $[0;1]$ є довільними, можемо обрати такі умови спряження:

$$\gamma_k^{(i)}(\bar{x}_i,\omega,q)=\gamma_k^{(i+1)}(\bar{x}_i,\omega,q),$$
$$\left[\gamma_k^{(i)}(\bar{x}_i,\omega,q)\right]'=\left[\gamma_k^{(i+1)}(\bar{x}_i,\omega,q)\right]' \qquad (20)$$

де $i=\overline{1,n-1}$. Тоді розв'язки $\gamma_k(\bar{x},\omega,q)$ граничної задачі (10), (12) будуть визначатися наступним чином:

$$\gamma_k(\bar{x},\omega,q)=\gamma_k^{(i)}(\bar{x},\omega,q), \qquad (21)$$

де $\bar{x}\in(\bar{x}_{i-1},\bar{x}_i]$, $i=\overline{1,n}$.

Отже, тепер можна використати вищеописаний метод розв'язання для усіх систем рівнянь (19). Із врахуванням (21) одержимо необхідну і достатню умову існування нетривіального розв'язку граничної задачі (1):

$$\Delta(\omega,q)=\begin{vmatrix}E_1(\bar{x}_n,\omega,q) & E_2(\bar{x}_n,\omega,q)\\ E_3(\bar{x}_n,\omega,q) & E_4(\bar{x}_n,\omega,q)\end{vmatrix}=0, \qquad (22)$$

де $E_1(\bar{x}_n,\omega,q)$, $E_2(\bar{x}_n,\omega,q)$, $E_3(\bar{x}_n,\omega,q)$, $E_4(\bar{x}_n,\omega,q)$ визначаються рекурентними формулами, які не наводяться тут через їх громіздкість.

Як і вище, функція $\Delta(\omega,q)$ з рівняння (22) завжди є невід'ємною. Цей факт дещо ускладнює чисельне визначення власних значень, у зв'язку із чим для знаходження пар значень $q$ та $\omega$ був використаний метод прямого пошуку мінімуму функції $\Delta(\omega,q)$ [3].

## 5. ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Перш за все, відзначимо, що усі наведені вище математичні викладки були перевірені системою комп'ютерної алгебри Maple, версія 9.5.

У цьому розділі наведено результати чисельних розрахунків, які було проведено на персональному комп'ютері Pentium 4 Intel PC, 256 MB RAM. Оскільки Maple виявився недостатньо ефективним, для чисельних розрахунків було використано Free Pascal, версія 2.0.0, що є доступною на сайті http://www.freepascal.org/. Програма на мові Pascal, що обчислювала власні значення неконсервативної граничної задачі (4) методом нормальних фундаментальних систем розв'язків, працювала майже миттєво.

За рівнянням (22) було досліджено залежність частот $\omega_1$, $\omega_2$ можливих коливань від різних параметрів реальної гнучкої пружної системи. Найбільший інтерес викликало з'ясування можливостей контролю частот коливань за допомогою зміни параметрів системи. Оскільки єдиним параметром, який можна регулювати у реальній системі, є коефіцієнт зворотнього зв'язку $d$, то було проаналізовано залежність частотного спектру системи від цього параметру.

Обчислення проводилися при параметрах

$$\varepsilon_1=0.005,\ \mu=0.008,$$
$$\eta=7,\ \delta=0.1, \qquad (23)$$

що мають місце в реальних системах з розподіленими та дискретними параметрами [4].

Згідно рівняння (22) на Рис.1 представлено графіки залежності дійсних частин $q_1$, $q_2$ перших двох власних значень від безрозмірного параметру $\nu$, що є прямопропорційним коефіцієнту зворотнього зв'язку $d$.

За рівнянням (22) уявні частини $\omega_1$, $\omega_2$ перших двох власних значень є практично незалежними від безрозмірного параметру $\nu$:

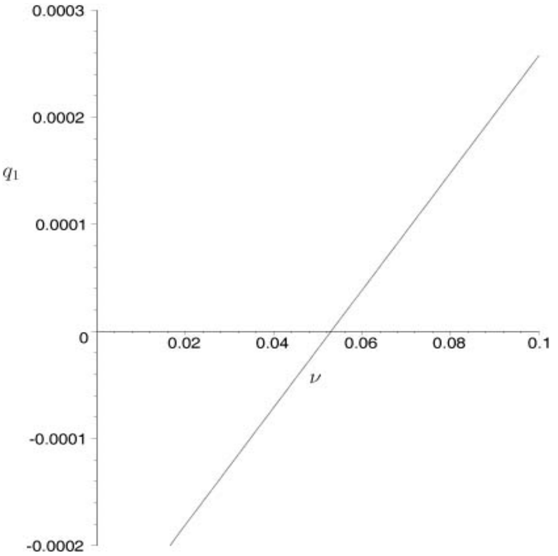
$$\omega_1=0{,}353,\quad \omega_2=2{,}905. \qquad (24)$$

Очевидно, що зона стійкості системи відповідає від'ємним значенням дійсних частин $q_1$, $q_2$ власних значень, а у випадку, коли вони дорівнюють нулю, маємо випадок автоколивань. Тому з Рис. 1,б видно, що вібрації не будуть збуджуватися на другій частоті.

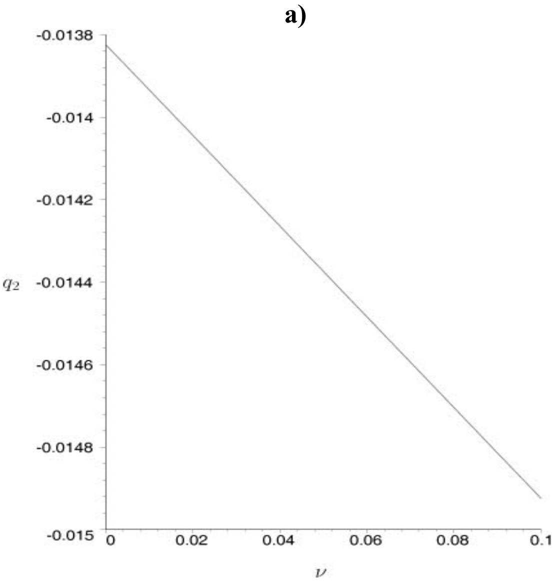
Крім того, за Рис. 1,а можливо визначити значення параметру $\nu$, при якому $q_1=0$. Це значення $\nu=0{,}053$ є максимально допустимим: при усіх більших значеннях $\nu$ перша власна частота $\omega_1$ знаходиться у зоні нестійкості, а отже в системі на цій частоті збуджуються коливання.

Таким чином, для кожної конкретної системи з розподіленими та дискретними параметрами можна визначити характер можливих коливань.

Той факт, що безрозмірний параметр $\nu$ є прямопропорційним коефіцієнту зворотнього зв'язку $d$, який можна цілеспрямовано змінювати шляхом використання різних зворотніх зв'язків [4], дає змогу цілеспрямовано змінювати власні значення розглянутої неконсервативної граничної задачі, а отже і частотний спектр, в якому можливе збудження коливань. Це дозволяє уникнути в розглянутій системі виникнення небажаних коливань, включаючи автоколивання.




**а)**




**б)**

**Рис.1 – Графіки залежності дійсних частин $q_1$, $q_2$ перших двох власних значень від параметру $\nu$.**

## 6. ВИСНОВКИ

В даній роботі розглянуто неконсервативну граничну задачу, що описує клас динамічних систем з розподіленими та дискретними параметрами, які використовуються у космічній інженерії. Для визначення і контролю частотного спектру, в якому можливе збудження коливань, було успішно використано чисельний метод нормальних фундаментальних систем розв'язків. Результати даної роботи можуть бути використані при проектуванні покращених гнучких пружних технічних систем.

## 7. СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

[1] К. Я. Кухта. В. П. Кравченко. В. А. Красношапка. *Качественная теория управляемых динамических систем с непрерывно-дискретными параметрами.* Наукова думка. Киев, 1986. с. 224.

[2] O. Mul. On Conditions of Excitation of Self-Oscillations in a Nonconservative Dynamic System with Distributed Parameters, *Cybernetics and Computing Technology, Complex Control Systems*, Allerton Press, New York (111) (1998). pp. 70-72.

[3] O. Mul. V. Kravchenko. Investigations of Vibrations in the Complex Dynamical Systems of Transmission Pipelines, *"Interface and Transport Dynamics. Computational Modelling"*, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (32) (2003). pp. 295-300.

[4] В. А. Красношапка. К устойчивости систем с распределенными параметрами при реализации активного управления большими гибкими системами, *Проблемы управления и информатики*, Киев (6) (2000). с. 60-65.

[5] К. Я. Кухта. В. П. Кравченко. *Нормальные фундаментальные системы в задачах теории колебаний.* Наукова думка. Киев, 1973. с. 205.

***Олена Муль** в 1994 р. закінчила Державний університет "Львівська політехніка" за спеціальністю "Прикладна математика". З 1994 р по 1998 р. навчалася в аспірантурі при Інституті кібернетики НАНУ, м. Київ. В 2000 р. захистила кандидатську дисертацію за спеціальністю "Системний аналіз та теорія оптимальних рішень". З 2001 р. доцент кафедри "Спеціалізованих комп'ютерних систем" Тернопільської академії народного господарства. Коло наукових інтересів: аналіз складних динамічних систем з розподіленими та дискретними параметрами.*

# THE NUMERICAL METHOD OF INVESTIGATIONS OF VIBRATIONS IN LARGE FLEXIBLE SYSTEMS

**Olena Mul [1)*], Delfim F. M. Torres [2)]**

[1)] Associate Professor, Institute of Computer Information Technologies, Ternopil State Economical University, 3 Peremoga Square, 46004 Ternopil, Ukraine, olena@mat.ua.pt
[*] Grant from FCT, Postdoc fellowship SFRH/BPD/14946/2004
[2)] Assistant Professor, Department of Mathematics, University of Aveiro, 3810-193 Aveiro, Portugal, delfim@mat.ua.pt, http://www.mat.ua.pt/delfim

**Keywords:** – *systems with distributed and discrete parameters, vibrations, numerical methods.*

Nonlinear dynamical systems with distributed and discrete parameters are widespread in heavy, extractive and manufacturing industry, as well as in space-system engineering [1-4]. Different complex dynamical processes are possible in such hybrid systems, including vibrations, which always have negative influence on their functioning and sometimes even can result in system breakdown.

Therefore, the aim of investigations is to study possible vibrations in such nonlinear dynamical systems with distributed and discrete parameters, as spacecrafts of big size, as well as to find ways how it is possible to decrease harmful effect of vibrations on normal functioning of the systems.

Spacecrafts of big size are considered, which contain some flexible elastic elements. Specifications for the spacecrafts (for example, in the control of form and accuracy of space antenna orientation) presume that intensive vibrations in such flexible constructions are not admissible. Passive damping of vibrations is often applied for elimination of vibrations, but strict specifications for the spacecrafts require other methods to control vibrations. One possibility is to use systems with active control of vibrations [1]. The problem is to study the effect of active control on the dynamical characteristics of the elastic construction with distributed parameters. There were several attempts to solve this problem before, using mathematical models of the system, which account discrete parameters only (see [4] and references therein). These results are not accurate enough. Following [4], we take into account all the distributed parameters of the flexible elastic construction. The mathematical model becomes a nonlinear boundary value problem, which consists of a partial differential equation and nonlinear boundary conditions:

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = ES\beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t},$$

$$x = 0, \quad u(0, t) = 0,$$

$$\begin{aligned} x = L, \quad & mES\beta \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^3} + m(d + b)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \\ & + ES(m + \beta b)\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + mc\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \\ & + ES(b + \beta c)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + ESc\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

where $u(x, t)$ is displacement of a point of bar with abscissa $x$, $S$ is bar cross-section area, $\rho$ is unit volume mass, $E$ is modulus of material elasticity, $\beta$ is coefficient of dissipation in material of bar, $b$ is damping factor of executive mechanism, $c$ is rigidity of centering spring, $d$ is coefficient of feedback, $m$ is specimen mass, $L$ is length of elastic bar.

It is necessary to point out that the problem (1) is a nonconservative boundary value problem. The non-conservatism is caused by the presence of the odd derivatives on time both in the equation of motion and in the boundary conditions. This allows assuming that eigenvalues of the considered boundary value problem are complex numbers, what is agreed with the results obtained in the papers [1-3]. This fact makes considerable difficulties for an exact analytical solution of the problem.

For the model (1) it is possible to develop both asymptotical and numerical methods. This allows to obtain frequencies of possible vibrations [2, 3].

In this way we can also determine conditions of stability under active control of vibrations. After analysis of influence of different parameters of the considered systems it is possible to make a conclusion about the optimal parameters.

In order to account the influence of different parameters onto possible vibrations and to simplify cumbersome calculations, we write boundary problem (1) in the dimensionless form, introducing dimensionless variables

$$\bar{u} = \frac{u}{L}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{ta}{L} \tag{2}$$

and dimensionless parameters

$$\varepsilon_1 = \frac{\beta a}{L}, \quad \mu = \frac{ba}{ES}, \quad \nu = \frac{da}{ES}, \qquad \eta = \frac{m}{\rho SL}, \quad \delta = \frac{ES}{cL}, \tag{3}$$

where $a^2 = \dfrac{E}{\rho}$.

In this paper, the numerical method of the normal fundamental systems of solutions is used for determination of the eigenvalues of the boundary value problem. The justification of the convergence of the method of normal fundamental systems of solutions, together with the theory, which explains its good accuracy when applied to vibration problems, can be found in the monograph [5].

Taking into account that the eigenvalues are complex numbers, the solution is searched in the following form:

$$u(\bar{x}, \tau) = [u_1(\bar{x}) + iu_2(\bar{x})]e^{(q+i\omega)\tau}, \tag{4}$$

where $q$ and $\omega$ are, respectively, the real and the imaginary parts of the eigenvalues. They are real constants, which should be determined.

An application of the numerical method of normal fundamental systems of solutions demands a presentation of the problem as a system of ordinary differential equations of the first order in the normal form, which satisfy some boundary conditions.

Therefore, in order to reduce (1) to the necessary form, the next new functions were entered:

$$\gamma_1 = u_1, \quad \gamma_2 = u_2, \quad \gamma_3 = u_3, \quad \gamma_4 = u_4. \tag{5}$$

By means of any known numerical method, one can solve the Cauchy problem for the set of equations in new functions (5) four times with the simple initial conditions and in this way generate its normal fundamental system of solutions.

With the help of such system of solutions, the relation of the form

$$\Delta(\omega, q) = 0 \tag{6}$$

is obtained, which is a necessary and sufficient condition for the existence of a non-trivial solution of the initial boundary value problem (1). It is an equation for a pair of numbers $q$ and $\omega$, which may be determined as its roots. The determinant $\Delta(\omega, q)$ from expression (6) is always non-negative, which is in agreement with the results obtained in [3].

All the numerical simulations were carried out on a Pentium 4 Intel PC, with 256 MB of RAM. All the mathematical transformations were done by hand and verified with the Computer Algebra System Maple, version 9.5. For the numerical simulations, Maple was not efficient enough, and we have used Free Pascal release 2.0.0, available at http://www.freepascal.org/. With Pascal the time of simulations was almost instantaneously.

The dependence of the frequencies of possible vibrations on different system parameters was investigated for the real large flexible system with following dimensionless parameters [4]:

$$\varepsilon_1 = 0.005, \quad \mu = 0.008, \qquad \eta = 7, \quad \delta = 0.1. \tag{7}$$

It is shown that for each definite hybrid system it is possible to define a character of possible vibrations. As dimensionless parameter $\nu$ is directly proportional to the feedback coefficient $d$, which may be purposefully changed by application of different feedbacks [4], it is possible to change purposefully eigenvalues of the considered nonconservative boundary problem. This allows to avoid in the system an excitation of undesirable vibrations, including self-excited vibrations.

The results of this paper may be applied in space-system engineering for design of new improved technical systems.