



## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ФОТОПЛЕТИЗМОСИГНАЛУ – ОСНОВА ІДЕНТИФІКАЦІЇ ІНФОРМАТИВНИХ ОЗНАК

Борис Марченко, Богдана Млинко, Михайло Фриз

Тернопільський державний технічний університет ім. І. Пулюя,  
м. Тернопіль, вул. Руська, 56, 46001  
mlynko@ukr.net, m\_fryz@ukr.net

**Резюме:** Запропоновано нову математичну модель фотоплетизмосигналу (ФПС) у вигляді лінійного періодичного випадкового процесу, яка відображає біофізичні особливості породження досліджуваного сигналу, його стохастичну періодичність, дозволяє аналізувати ФПС методом характеристичних функцій, визначати інформативні ознаки за результатами експериментальних досліджень.

**Ключові слова:** Фотоплетизмосигнал, математична модель, пуассонівський процес, лінійний випадковий процес, характеристична функція, ядро, періодичний випадковий процес, моментні функції.

### 1. ВСТУП

Побудова та обґрунтування моделі – один із найважливіших етапів цифрової обробки сигналів і використання отриманих результатів в діагностичних системах з метою розв'язування задач виявлення інформативних ознак, розпізнавання патологій, прийняття рішень, комп'ютерного моделювання.

Фотоплетизмосигнали (ФПС) – це зареєстровані у часі ритмічні зміни світлопроникності органів або частини тіла, обумовлені змінами величини їх кровонаповнення.

Сучасні дослідження фотоплетизмосигналів у деякій мірі використовують стохастичний підхід до їх моделювання та обробки. Найпоширенішим і найпростішим методом обробки ФПС є визначення та статистичний аналіз таких показників як максимуми, мінімуми, точки перегину отримуваних кривих, площі під кривими та ін [1, 2]. Такі діагностичні ознаки є зрозумілими і звичними для лікарів, оскільки вони використовують їх у своїй повсякденній практиці при постановці діагнозу.

### 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

В сучасних дослідженнях при розробці математичних моделей ритмічних сигналів, впроваджуються стохастично періодичні випадкові процеси, тобто такі процеси, в яких певні ймовірнісні характеристики є

періодичними функціями часу. Такі моделі в тій чи іншій мірі враховують наявність циклічності в часовій структурі сигналів.

Загальновідомою найпростішою моделлю ритмічних сигналів є сума стаціонарного випадкового процесу та детермінованої періодичної функції [3].

Така модель є дуже спрощеною і не має біофізичного підґрунтя. Очевидно, вона побудована лише на основі апостеріорного аналізу експериментальних результатів.

До моделей такого типу можна віднести також моделі сигналів у вигляді періодично-корельованих випадкових процесів (ПКВП), для яких, на відміну від стаціонарних процесів, перші дві моментні функції є періодичними з деяким періодом [4, 5].

Завдяки використанню цих моделей було досягнуто певних результатів при дослідженні ритмічних процесів. Незважаючи на деякі переваги ПКВП у порівнянні із іншими вищезгаданими математичними моделями, все ж ці процеси неможливо пов'язати із біофізичними властивостями досліджуваного сигналу, зокрема тому, що вони є неконструктивними. Крім того, модель у вигляді ПКВП враховує періодичність лише перших двох моментних функцій - математичного сподівання та кореляційної функції (хоча назва моделі начебто вказує на періодичність, власне, самого процесу) і, як наслідок, дозволяє вивчати ці сигнали тільки у рамках кореляційної теорії.

Вищі ж моментні функції та функції розподілу не можуть бути враховані на її основі. При визначенні ж похибки результату вимірювання та статистичної обробки ФПС навіть у рамках кореляційної теорії, необхідно знати моменти вище другого порядку.

Таким чином, проведений аналіз літературних джерел, показав, що дослідженню моделей біосигналів такої природи присвячена порівняно невелика кількість робіт. Відомі моделі мають недоліки, зокрема, є описовими або взагалі не придатні для розв'язування поставлених задач.

Розглянемо побудову математичної моделі ФПС з урахуванням біофізичних особливостей його формування.

### 3. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

Відбір фотоплетизмосигналу здійснюється оптоелектронним перетворювачем, який працює в інфрачервоній області світлового діапазону. Принцип дії перетворювача ґрунтується на просвічуванні досліджуваної ділянки світловим потоком від джерела випромінювання (світлодіод) і вимірюванні відбитого потоку фотоприймачем (фотодіод).

Потік випромінювання, що попадає на фотоприймач, містить дві складові: постійну та змінну, яка є інформативною. Величина змінної складової інтенсивності світла, яка реєструється та досліджується, визначається величиною інтенсивності світла, що розсіялось за рахунок відбивання від еритроцитів [6], тобто визначається кількістю та властивостями еритроцитів. Саме їх кількість у світловому пучку суттєво впливає на світлопоглинання крові, випадково змінюється з часом, причому змінюється ритмічно, що обумовлено періодичними скороченнями серця.

В область, прозондовану світловим пучком, у момент часу  $\tau_k, k \in \mathbf{Z}$  потрапляє кожен  $k$ -ий еритроцит ( $k \in \mathbf{Z}$ ). Це призводить до відбивання ним світла з інтенсивністю, яка описується функцією  $\tilde{I}_k(\tau_k, t)$ , де  $\tau_k$  - момент входу  $k$ -го еритроцита в область світлового пучка;  $t$  - момент спостереження. Моменти часу  $\tau_k, k \in \mathbf{Z}$  попадання еритроцитів у світловий пучок є випадковими. Кожний  $k$ -ий еритроцит перебуває у світловому пучку на протязі скінченного інтервалу часу  $[\tau_k, \tau_k + \tilde{l}(\tau_k)]$  (де  $\tilde{l}(\tau) > 0$  - тривалість перебування еритроцита у світловому пучку, яка є функцією (випадковою) від  $\tau$ , оскільки швидкість руху крові (і, відповідно, час перебування еритроцита у

світловому пучку) залежить від фази роботи серця: під час систоли вона більша, а під час діастоли – менша), тому  $\tilde{I}_k(\tau_k, t)$ , як функція  $t$ , має імпульсний характер,  $\tilde{I}_k(\tau_k, t) = 0$  при  $t \notin [\tau_k, \tau_k + \tilde{l}(\tau_k)]$ . Розміри, форма кожного еритроцита, а також положення їх відносно падаючого на них випромінювання мають випадковий характер, тому імпульси  $\tilde{I}_k(\tau_k, t)$  є випадковими функціями (на рис.1 пунктиром схематично зображено реалізацію такої функції).

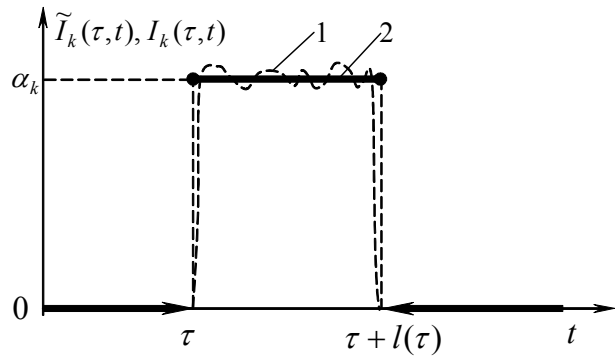


Рис. 1 - Графічне зображення реалізацій:

- 1 - відбитого імпульсу ( $\tilde{I}_k(\tau, t)$ ) та
- 2 - його моделі ( $I_k(\tau, t)$ )

Далі, для побудови моделі ФПС приймаються такі спрощення.

1. Замість випадкової функції  $\tilde{l}(\tau)$  розглядається її математичне сподівання  $l(\tau) = \mathbf{M}\tilde{l}(\tau)$  (середня тривалість перебування еритроцита в світловому пучку),  $l(\tau) = l(\tau + T)$ , де  $T$  - період серцевих скорочень.
2. Замість функції  $\tilde{I}_k(\tau, t)$  вводиться функція

$$I_k(\tau, t) = \alpha_k \varphi(\tau, t), \quad (1)$$

де  $\alpha_k > 0, k \in \mathbf{Z}$  – випадкові величини;

$\varphi(\tau, t)$  - не випадкова функція, яка зображується наступним чином:

$$\varphi(\tau, t) = U(t - \tau) \cdot U(\tau + l(\tau) - t), \quad (2)$$

де  $U(s) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ 1, & s \geq 0 \end{cases}$  - функція Хевісайда,

причому, функція  $I_k(\tau, t)$  така, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_k(\tau, t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{I}_k(\tau, t) dt, \forall \tau \text{ (див. рис.1).}$$

Відносно процесу попадання еритроцитів у світловий пучок вважатимемо наступне:

1. Еритроцити входять у зону, прозондовану світловим пучком, у послідовні моменти часу  $\{\dots \tau_{-2} < \tau_{-1} < \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 \dots < \tau_k \dots\}$ , причому величини  $\Delta \tau_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ , інтервалів між ними є незалежними випадковими величинами.
2. За достатньо малий проміжок часу  $(\tau, \tau + \Delta \tau)$  ймовірність появи одного відбитого імпульсу (входу еритроцита у світловий пучок) дорівнює  $\lambda(\tau)\Delta \tau + o(\Delta \tau)$ , де  $\lambda(\tau)$  - детермінована функція, що характеризує інтенсивність появи еритроцитів у світловому пучку (вона є функцією часу  $\tau$ , оскільки, як і  $l(\tau)$  залежить від фази роботи серця),  $\lambda(\tau) = \lambda(\tau + T)$ . Ймовірність появи більш, ніж одного імпульсу за малий проміжок часу  $(\tau, \tau + \Delta \tau)$  має порядок  $o(\Delta \tau)$ .
3.  $\alpha_k > 0, k \in \mathbf{Z}$  є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, які не залежать також і від випадкових величин  $\tau_k, k \in \mathbf{Z}$ .

На основі п.1, 2 можна зробити висновок, що процес виникнення відбитих імпульсів є пуассонівським потоком з параметром  $\lambda(\tau)$ ,  $\tau \in (-\infty, \infty)$ .

Середовище, де розповсюджуються відбиті світлові імпульси, має лінійні властивості, тому інтенсивність світла, що поступає на фотоприймач (сумарний відбитий сигнал), рівна сумі інтенсивностей світлових імпульсів, відбитих кожним еритроцитом зокрема. Отже, змінну складову  $\xi(t)$  ФПС можна представити у вигляді:

$$\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k(\tau_k, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \varphi(\tau_k, t). \quad (3)$$

Вираз (3) можна зобразити у зручнішому для розв'язування теоретичних і практичних задач вигляді. Для цього введемо неоднорідний узагальнений пуассонівський процес  $\pi(\tau)$ , що відповідає нестационарному пуассонівському потокові з параметром  $\lambda(\tau)$ , який був розглянутий вище і характеризує процес появи відбитих імпульсів світла. А саме, процес  $\pi(\tau)$

введемо так, щоб його стрибки відбувалися у моменти  $\tau_k$  і дорівнювали випадковим величинам  $\alpha_k$ .

Тоді процес  $\xi(t)$  можна записати у вигляді стохастичного інтегралу:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t) d\pi(\tau), \quad t \in (-\infty, \infty). \quad (4)$$

Випадковий процес  $\xi(t)$ , який допускає зображення (4), називається лінійним випадковим процесом (ЛВП) [7]. У цьому зображенні:  $\varphi(\tau, t)$  – не випадкова функція (ядро ЛВП), для якої, враховуючи розглянуті вище властивості відбитих імпульсів, виконується:

$$\varphi(\tau, t) = 0 \text{ при } t < \tau, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(\tau, t) d\tau < \infty, \forall t; \quad \pi(\tau),$$

$\mathbf{P}\{\pi(0) = 0\} = 1, \quad \mathbf{D}[d\pi(\tau)] < \infty$  – породжуючий процес з незалежними приростами.

Ядро  $\varphi(\tau, t)$  характеризує імпульси (2), а породжуючий процес  $\pi(\tau)$  – моменти їх появи та інтенсивність.

#### 4. АНАЛІЗ ВЛАСТИВОСТЕЙ МОДЕЛІ

Математична модель ФПС, побудована у даній роботі, має біофізичне підґрунтя (оскільки обґрунтована на основі фізики взаємодії світла з еритроцитами), враховує стохастичність досліджуваного сигналу та може бути використана в задачах визначення функціонального стану судинного русла, оскільки допускає визначення своїх характеристик за результатами експериментальних досліджень.

В моделі (4) враховано також ритмічні властивості ФПС. Дійсно, оскільки  $\lambda(\tau) = \lambda(\tau + T)$ , то  $\pi(\tau)$  є процесом з незалежними  $T$ -періодичними приростами [8]. З того, що  $l(\tau) = l(\tau + T)$  випливає  $\varphi(\tau, t) = \varphi(\tau + T, t + T)$ . Згідно [8], тепер можна стверджувати, що випадковий процес (4) є стохастично періодичним за Слущким, тобто

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + T, t_2 + T, \dots, t_n + T),$$

де  $F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$  -  $n$ -вимірна функція розподілу випадкового процесу  $\xi(t)$ .

Таким чином, випадковий процес (4) є лінійним періодичним випадковим процесом (ЛПВП) [8].

Позитивною властивістю ЛВП є те, що вони мають безмежно-подільні функції розподілу, для яких відома загальна форма характеристичної функції. Це дає можливість розв'язувати прикладні задачі аналізу процесів з урахуванням їх законів розподілу у повному обсязі.

Для лінійного періодичного випадкового процесу  $\xi(t)$  логарифм  $n$ -вимірної характеристичної функції визначається так [8]:

$$\begin{aligned} & \ln f(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ & = \ln f(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1 + T, t_2 + T, \dots, t_n + T) = \\ & = i \sum_{j=1}^n u_j \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t_j) d\mu(\tau) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n u_i u_j \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t_i) \varphi(\tau, t_j) d\sigma(\tau) + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{ix \sum_{k=1}^n u_k \varphi(\tau, t_k)} - 1 - \frac{ix}{1+x^2} \sum_{k=1}^n u_k \varphi(\tau, t_k) \right] \times \\ & \quad \times d_x d_\tau L(x, \tau), \end{aligned} \quad (5)$$

де  $L(x, \tau)$  - невизначена в нулі функція, яка називається пуассонівським спектром стрибків у формі Леві породжуючого процесу (в загальному випадку породжуючим може бути будь-який процес з незалежними приростами).

Ця функція визначається як

$$L(x, \tau) = \begin{cases} M(x, \tau), & x < 0, \\ N(x, \tau), & x > 0. \end{cases}$$

де  $M(x, \tau)$  та  $N(x, \tau)$  ( $M(-\infty, \tau) = N(\infty, \tau) = 0$ ) - неспадні функції, що відповідно задають від'ємні та додатні стрибки (прирости) породжуючого процесу.

Функції  $\mu(\tau)$  та  $\sigma(\tau)$  визначаються так:

$$\begin{aligned} d\mu(\tau) &= d\kappa_1(\tau) - d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x d_x L(x, \tau), \\ d\sigma(\tau) &= d\kappa_2(\tau) - d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2) d_x L(x, \tau), \end{aligned}$$

де  $\kappa_1(\tau)$  та  $\kappa_2(\tau)$  - перша та друга кумулянтні функції породжуючого процесу.

Загальний вигляд характеристичної функції (5) дозволяє проводити повний аналіз відгуків

лінійних систем [9]: знаходити кумулянти, функцію розподілу відгуку, вивчати розподіли стрибків на вході та виході таких систем, досліджувати зв'язки між вхідними і вихідними характеристиками лінійних ланок і, що винятково важливо для практики, досліджувати ергодичні властивості емпіричних статистик.

Вираз (5) задає характеристичну функцію ЛПВП загального виду. Врахуємо тепер, що  $\pi(\tau)$  - це узагальнений пуассонівський процес. У цьому випадку, згідно з [7], логарифм  $n$ -вимірної характеристичної функції ЛПВП має вигляд:

$$\begin{aligned} & \ln f(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ & = \ln f(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1 + T, t_2 + T, \dots, t_n + T) = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{ix \sum_{k=1}^n u_k \varphi(\tau, t_k)} - 1 \right) dF(x) d\tau, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $F(x)$  - функція розподілу випадкових величин  $\alpha_k, k \in \mathbf{Z}$ .

## 5. МОМЕНТНІ ФУНКЦІЇ СИГНАЛУ

Згідно [6], кількість еритроцитів в  $1 \text{ мм}^3$  становить близько  $5 \cdot 10^6$ , максимальна швидкість кровотоку -  $6 \text{ см/с}$ , тому, очевидно, у даному випадку  $\lambda(\tau)$  є достатньо великою. Звідси випливає, що процес  $\xi(t)$  має розподіл достатньо близький до нормального. Даний висновок підтверджено результатами гістограмного аналізу одно- та двовимірних розподілів ФПС з використанням  $\chi^2$ -критерію Пірсона [10].

Оскільки процес  $\xi(t)$  має близький до нормального розподіл, то він достатньо повно характеризується своїм математичним сподіванням та кореляційною функцією. Тому в [11] ідентифіковано інформативні параметри ФПС на основі аналізу математичного сподівання та кореляційної функції методом ортогональних розкладів. А саме, як інформативні, використовуються перші 6 коефіцієнтів ортогонального розкладу математичного сподівання в базисі дискретних експоненціальних функцій та перші 7 власних векторів та власних чисел кореляційної функції. В [11] розглянуто також методи статистичного оцінювання інформативних параметрів, а в [12] - критерії прийняття діагностичних рішень на їх основі. В [13] побудовано алгоритм

комп'ютерного імітаційного моделювання ФПС з використанням ортогональних розкладів.

З іншої сторони, математичне сподівання та кореляційна функція ФПС, з аналізу яких визначаються згадані інформативні параметри, безпосередньо зв'язані з характеристиками обгрунтованої вище моделі (4).

Дійсно, з (6) неважко знайти математичне сподівання  $M\xi(t)$  та кореляційну функцію  $R(t_1, t_2)$  процесу (4). А саме:

$$M\xi(t) = \frac{1}{i} \frac{\partial [\ln f(u; t)]}{\partial u} \Big|_{u=0} = m_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t) \lambda(\tau) d\tau, \quad (7)$$

$$R(t_1, t_2) = \frac{1}{i^2} \frac{\partial^2 [\ln f(u_1, u_2; t_1, t_2)]}{\partial u_1 \partial u_2} \Big|_{u_1=u_2=0} = m_2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t_1) \varphi(\tau, t_2) \lambda(\tau) d\tau, \quad (8)$$

де  $m_1 = \kappa_1 = M\alpha_k$ ,  $m_2 = \kappa_2 + \kappa_1^2 = M\alpha_k^2$ ,

$f(u; t)$ ,  $f(u_1, u_2; t_1, t_2)$  - одно- та двовимірні характеристичні функції процесу  $\xi(t)$ , які отримуються з (6), відповідно, при  $n = 1$  та  $n = 2$ .

Згідно [8], моментні функції ЛПВП є періодичними за сукупністю аргументів. Тобто, для (7) і (8) має місце  $M\xi(t) = M\xi(t + T)$ ,  $R(t_1, t_2) = R(t_1 + T, t_2 + T)$ .

## 6. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Реєстрація та аналіз фотоплетизмосигналів здійснювались з використанням комп'ютерної інформаційної системи, структурну схему якої зображено на рис.2.

На схемі: БО – біологічний об'єкт (ділянка тканини організму, насичена кровоносними судинами); ОЕП – оптоелектронний перетворювач, який складається з блоку випромінювання (БВ) світлодіодного типу (довжина хвилі спектрального максимуму випромінювання – 0.94-0.96 мкм), оптичного каналу (ОК), який призначений для спрямування інфрачервоного випромінювання на БО, блоку прийому відбитого чи розсіяного БО випромінювання (БПВ); БРР – блок реєстрації реалізацій фотоплетизмосигналу; БОДП – блок статистичного оцінювання діагностичних

параметрів; БДП – блок формування діагностичних просторів; БПР – блок прийняття діагностичних рішень (БРР, БОДП, БДП, БПР реалізовані на ПЕОМ у вигляді відповідного пакету прикладних програм).

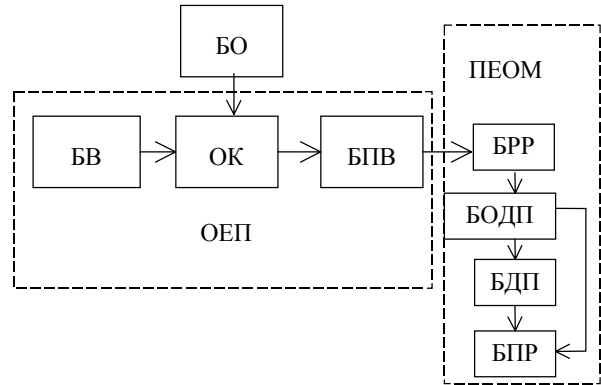


Рис. 2 – Структурна схема комп'ютерної системи для реєстрації та аналізу фотоплетизмосигналів

На рис.3 наведено приклад зареєстрованої реалізації ФПС (тут легко зауважити циклічність, але відсутність детермінованої періодичності).

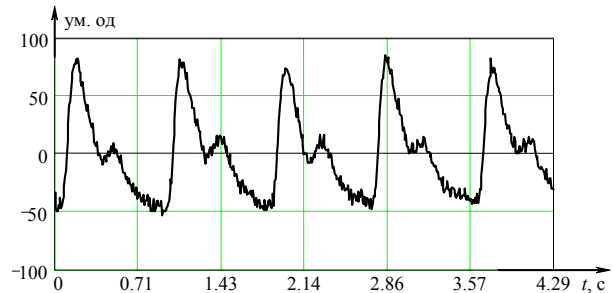


Рис. 3 – Реалізація фотоплетизмосигналу

Оцінювання ймовірнісних характеристик фотоплетизмосигналу здійснюється на основі побудованої вище його математичної моделі, зокрема, з врахуванням стохастичної періодичності (яка обгрунтована на основі біофізичної природи породження ФПС).

Спочатку здійснено оцінювання періоду ФПС методом, запропонованим в [14].

Оцінка періоду  $T$ -періодичного за Слущким процесу  $\xi(t), t \in (-\infty, \infty)$  будується на основі статистики виду:

$$h_s = \max_{j=0, s-1} \gamma_{sj} - \min_{j=0, s-1} \gamma_{sj}, \quad (9)$$

де  $s$  – „пробний” період,  $s = \overline{s_1, s_2}$ ;

$$\gamma_{sj} = \frac{1}{k_s} \sum_{l=1}^{k_s} \xi_{(l-1)s+j}, \quad j = \overline{0, s-1}, \quad (10)$$

де  $(\xi_0, \dots, \xi_k, \dots, \xi_{n-1})$  - вибірка, отримана із процесу  $\xi(t)$ , шляхом його дискретизації з кроком  $\Delta t$ , тобто  $\xi_k = \xi(k\Delta t), k = \overline{0, n-1}$  (у даних експериментах  $1/\Delta t = 140$  Гц);

$$k_s = \left[ \frac{n}{s} \right], ([\cdot] - \text{функція ціла частина}).$$

Для задання діапазону  $\overline{s_1, s_2}$  зміни „пробного” періоду необхідно мати апіорну інформацію про межі інтервалу, у якому знаходиться значення невідомого періоду. Наприклад, якщо відомо, що період серцевих скорочень пацієнта у експерименті лежить у інтервалі від 0.5 до 1.5 секунд, то  $s_1 = 0.5 \cdot 140 = 70$ ,  $s_2 = 1.5 \cdot 140 = 210$ .

Асимптотично незсунена та конзистентна [14] оцінка  $\hat{T}$  періоду визначається, як  $\hat{T} = \Delta t \max_s h_s$ . На рис.4 наведено приклад реалізації статистики  $h_s$ .

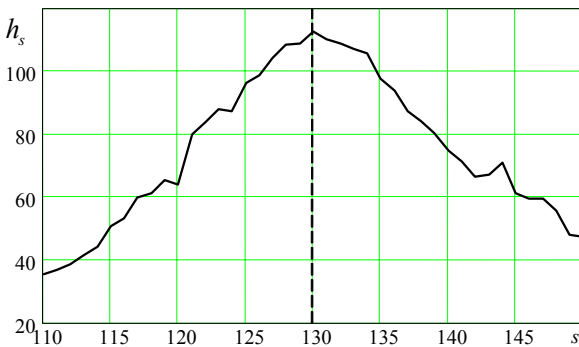


Рис. 4 - Реалізація статистики  $h_s$ .

У даному випадку реалізація оцінки періоду дорівнює  $\hat{T} = \frac{130}{140 \text{ Гц}} = 0,93 \text{ сек}$  (це відповідає частоті серцевих скорочень близько 65 уд./хв).

Розглянемо тепер оцінки математичного сподівання та кореляційної функції стохастично періодичного процесу  $\xi(t), t \in (-\infty, \infty)$ .

Нехай  $L = \frac{T}{\Delta t} > 1$  - ціле число. Послідовність  $\xi_{kl} = \xi(k\Delta t + lT)$ ,  $k = \overline{0, L-1}, l \in \mathbf{Z}$  при фіксованому  $k$  називається  $\phi_k$ -серією періодичного процесу  $\xi(t)$ . Легко бачити, що  $\phi_k$ -серія – це сукупність впорядкованих за часом відліків процесу  $\xi(t)$ , взятих через період  $T$ . Різні  $\phi_k$ -серії отримуються заданням різних

„початкових фаз”  $k\Delta t$ .

Основною властивістю  $\phi_k$ -серій (яка використовується для дослідження розподілів періодичних випадкових процесів) є те, що вони є стаціонарними та стаціонарно зв'язаними випадковими послідовностями, що дозволяє будувати оцінки їх ймовірнісних характеристик відомими методами статистичного аналізу стаціонарних випадкових процесів. Будемо також надалі вважати  $\phi_k$ -серії ергодичними відносно математичного сподівання та кореляційної функції (можливість обґрунтування такої ергодичності впливає із конструктивності процесу (4) та наявності загального вигляду його характеристичної функції (6)).

Незсуненою та конзистентною оцінкою математичного сподівання  $\phi_k$ -серії є:

$$\bar{\xi}_k = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \xi_{kl}, k = \overline{0, L-1}, \quad (11)$$

де  $m$  - обсяг вибірки з  $\phi_k$ -серії (загальний обсяг вибірки  $(\xi_0, \dots, \xi_k, \dots, \xi_{n-1})$  з процесу  $\xi(t)$  при цьому дорівнює  $n = mL$ ).

Очевидно, що  $\bar{\xi}_k, k = \overline{0, L-1}$  є оцінкою математичного сподівання  $\mathbf{M}\xi(k\Delta t)$ ,  $k = \overline{0, L-1}$ , тобто математичного сподівання продискретизованого  $T$ -періодичного процесу  $\xi(t)$  на інтервалі  $[0, T)$  (оскільки  $\mathbf{M}\xi(t)$  є  $T$ -періодичною функцією, то достатньо її аналізувати якраз на інтервалі  $[0, T)$ ).

Асимптотично незсунені та конзистентні оцінки відліків  $R(i\Delta t, j\Delta t)$  кореляційної функції  $R(t_1, t_2)$  в області  $[0, T) \times [0, \infty)$  (цього достатньо для її опису на всій області визначення, враховуючи періодичність  $R(t_1, t_2)$  за сукупністю своїх аргументів) можна отримати наступним чином:

$$\hat{R}_{ij} = \frac{1}{m - \left[ \frac{j}{L} \right]} \sum_{l=0}^{m-1 - \left[ \frac{j}{L} \right]} (\xi_{il} - \bar{\xi}_i) (\xi_{j+l} - \bar{\xi}_{j - \left[ \frac{j}{L} \right]}), \quad i = \overline{0, L-1}, j = \overline{0, p}, p \ll m. \quad (12)$$

Нижче наведено результати оцінювання математичного сподівання (рис.5) та дисперсії  $R(t, t)$  (рис.6) ФПС на інтервалі  $[0, T)$ .



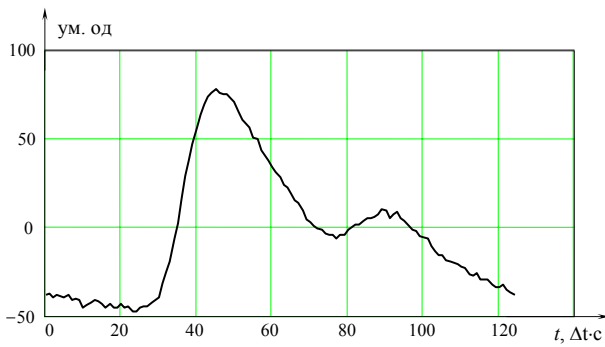


Рис. 5 - Реалізація оцінки математичного сподівання фотоплетизмосигналу

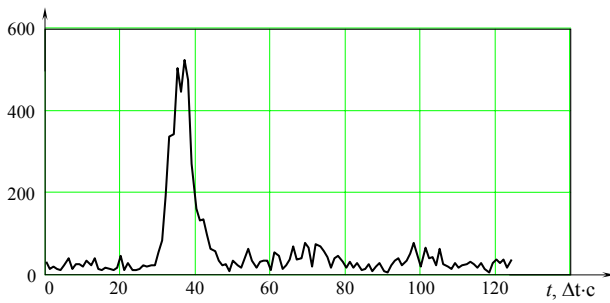


Рис. 6 - Реалізація оцінки дисперсії фотоплетизмосигналу

На завершення наведемо аргументи, які підтверджують коректність побудованої моделі:

- математична модель ФПС обґрунтована з врахуванням біофізичних особливостей взаємодії світла з кров'ю, тому ця модель узгоджується з досліджуванним явищем;
- обґрунтована, на основі фізичної природи ФПС, властивість його стохастичної періодичності, підтверджується результатами експериментів;
- результати оцінювання періоду ФПС відповідають результатам безпосереднього вимірювання періоду серцевих скорочень;
- характеристики моделі допускають їх експериментальне оцінювання (відповідність задачам вимірювання та діагностики).

## 7. ВИСНОВКИ

1. Обґрунтовано математичну модель ФПС у вигляді ЛПВП, яка на відміну від існуючих, відображає суть біофізичної інформації про породження ФПС, враховує стохастичність та ритмічність, дозволяє проводити його ймовірнісний аналіз методом характеристичних функцій.
2. З використанням методу характеристичних функцій показано взаємозв'язок перших двох моментних функцій ФПС (які є основою для ідентифікації інформативних ознак) з характеристиками ядра та породжуючого процесу ЛВП.
3. Отримано оцінки математичного сподівання

та кореляційної функції ФПС, які можуть використовуватись як інформативні ознаки при побудові правил прийняття діагностичних рішень.

## 8. СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Кожем'яко В.П., Готра З.Ю., Павлов С.В., Микитюк З.М. Біомедичні оптико-електронні інформаційні системи і апарати. Частина 3. – Вінниця: Вид-во ВДГУ, 2000. – 134 с.
- [2] А.А.Десова, Ю.С.Легович, О.С.Разин. Компьютерная система диагностики на базе анализа ритмической структуры пульсового сигнала лучевой артерии // Медицинская техника. – 1999. - №3. – С. 3-5.
- [3] Мерсер Д. Аналитические методы исследования периодических процессов, замаскированных случайными флуктуациями. - В кн.: Биологические часы. - М.: Мир, 1964. - С. 126-152.
- [4] Случайные процессы: Справочник / Под ред. И.Н. Коваленко. – К.: Наукова думка, 1983. – 265 с.
- [5] Драган Я.П., Приймак Н.В. Линейные периодически коррелированные случайные процессы. – Львов: 1986. - 30 с.
- [6] Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно- неоднородных средах. Т1: Однократное рассеяние и теория переноса: Пер. с англ. Л.А. Апресяна и др.-М.: Мир, 1981. – 238 с.
- [7] Марченко Б.Г. Метод стохастических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике.-К.: Наукова думка, 1973.-191 с.
- [8] Марченко Б.Г. Лінійні періодичні процеси //Праці Інституту електродинаміки НАН України. Електротехніка. - Київ: ІЕД НАН України, 1999. - С. 172-185.
- [9] Марченко Б.Г., Мыслович М.В. Вибродиагностика подшипниковых узлов электрических машин.-К.:Наук. думка,1992.- 196с.
- [10]Бабак В.П., Марченко Б.Г., Фриз М.Є. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика. – К.: Техніка, 2004. – 288 с.
- [11]Млинко Б.Б., Фриз М.Є. Ідентифікація та оцінювання діагностичних параметрів на основі аналізу фотоплетизмограми // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2002. - Т.7, №4. - С. 81-87.
- [12]Млинко Б.Б. Статистична діагностика судинної системи на основі аналізу фотоплетизмографічного сигналу // Оптико-електронні інформаційно-енергетичні

технології. – Вінниця: Вид-во національного технічного ун.-ту, 2004. - №2(8). - С. 127 – 133.

[13] Млинко Б.Б., Фриз М.Є. Імітаційне моделювання фотоплетизмосигналу методом ортогональних розкладів // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – Хмельницький: Вид-во Технологічного ун-ту Поділля. – 2004. - №2. - С.82-85.

[14] Гузий В.И., Приймак Н.В. Исследование возможности измерения периода корреляции периодически коррелированного случайного процесса по одной наблюдаемой реализации // Вестник Киев. политехн. института. Электроакустика и звукотехника. - 1984. - Вып. 8. - С. 31-33.

радіофізики, гідроакустики, технічної та медичної діагностики, обробки сигналів; теорія та практичне застосування інформаційно-вимірювальних систем; теорія вимірювань; математичне моделювання; керівник наукової школи, яка плідно працює вже більше 40 років.

Б.Г. Марченко – учасник двох Міжнародних математичних конгресів: в Тбілісі (1967) та Берліні (1998).



**Богдана Богданівна Млинко**, кандидат технічн. наук, доцент; доцент кафедри комп'ютерних наук ТДТУ ім. І.Пулюя.

Напрямок наукової діяльності: математичне та імітаційне моделювання біомедичних сигналів для комп'ютерної діагностики.



**Борис Григорович Марченко**, лауреат державної премії України в галузі науки і техніки 2005 року, доктор фізико-математичних наук, професор; провідний науков. співробітник Інституту електродинаміки НАН України, професор, почесний професор Національного

авіаційного університету, професор кафедри комп'ютерних наук ТДТУ ім. І.Пулюя.

Галузі наукової діяльності: теорія випадкових процесів та її застосування в задачах



**Михайло Євгенович Фриз**, кандидат технічних наук, доцент; заступник декана факультету електронних апаратів та комп'ютерних систем, доцент кафедри комп'ютерних наук ТДТУ.

Напрямки наукової діяльності: інформаційно-вимірювальні системи для медичної діагностики; математичне, комп'ютерне моделювання та обробка біомедичних сигналів, газонавантажень, навантажень комп'ютерних мереж.



## MATHEMATICAL MODEL OF PHOTOPLETYSMIC SIGNAL AS THE BASE FOR INFORMATIONAL PARAMETERS IDENTIFICATION

Borys Martchenko, Bogdana Mlynko, Mykhaylo Fryz

Department of computer sciences of Ternopil State Ivan Pul'uj Technical University,  
Ruska str., 56, Ternopil, Ukraine, 46001  
mlynko@ukr.net, m\_fryz@ukr.net

**Abstract:** Taking into account the biophysical genesis of researched signal and its rhythmic nature the new mathematical model of photoplethysmic signal as a linear periodical random process is developed; characteristic functions analysis of signal, experimental informational parameters estimating are possible with this model.

**Keywords:** Photoplethysmic signal, mathematical model, Poisson process, linear periodical random process, characteristic function, moment function.

Photoplethysmic signals (PPS) are the rhythmic time changes of organs or organisms parts light permeability, caused by changes of their fill of the blood level.

The general known simplest model of the rhythmic random biosignals is the sum of stationary random process and the deterministic periodical function. This model is too simple and haven't the biophysical basis.

The model of signals as a periodical correlated random process (PCRP) is more productive. But PCRP takes into account the periodicity of only first and second moment functions, that is mathematical expectation and correlation function. As a consequence, PCRP limits the signals investigations by correlation theory.

The photoplethysmic acquisition is realized by IR-raying of the organ under investigation and measuring of reflected light intensity. The time-varying component of this intensity is determined by sum of light impulses intensities that are reflected by erythrocytes. On the base of PPS biophysical genesis and under some simplifications the mathematical model of PPS is presented by the formula (3), where  $I_k(\tau_k, t)$  is the intensity model of reflected impulses (fig.1),  $\alpha_k > 0, k \in \mathbf{Z}$  is the identically distributed independent random variables (the intensities of light impulses reflected by erythrocytes),  $\tau_k, k \in \mathbf{Z}$  is the Poisson flow with parameter  $\lambda(\tau)$ ,  $\tau \in (-\infty, \infty)$  (the time moments when erythrocytes are fall into lit zone), function  $\varphi(\tau, t)$  is determined by (2) ( $l(\tau)$  - the mean duration of stay the erythrocytes in the lit zone). The more available for theoretical analysis notion of process  $\xi(t)$  can be presented in form (4), were

$\pi(\tau)$  is the generalized Poisson process with jumps equal to  $\alpha_k$ , which appear in the time moments  $\tau_k$ . The random process (4) is called linear random process.

Taking into account  $\lambda(\tau) = \lambda(\tau + T)$  and  $l(\tau) = l(\tau + T)$  (where  $T$  is the period of heartbeats), we obtain that (4) become the periodical by Slutskiy random process, which has  $T$ -periodical (by the set of time arguments) probability distribution functions.

That is, (4) is the linear periodical random process (LPRP).

The probability distributions of the linear periodical random process are infinitely divisible. It is possible to characterise linear periodical random processes by looking at their characteristic functions. The characteristic function of LPRP satisfies the relation (5), but for photoplethysmic signal model relation (5) leads to (6), where  $F(x)$  is the probability distribution function of random variables  $\alpha_k, k \in \mathbf{Z}$ .

The mathematical expectation  $\mathbf{M}\xi(t)$  and correlation function  $R(t_1, t_2)$  of process (4) are obtained from (6). They presented by the formulas (7) and (8). Obviously both are dependent the characteristics of model (4).

The LPRP moment functions are periodical by the set of time arguments. That is, (7) and (8) satisfy the relations:  $\mathbf{M}\xi(t) = \mathbf{M}\xi(t + T)$  and  $R(t_1, t_2) = R(t_1 + T, t_2 + T)$ . The mathematical expectation and correlation function of PPS are used for diagnostic parameters identification.

The registration and analysis of photoplethysmic signals are realized using the computer information

system, which structural scheme is presented on the fig.2.

On the scheme: BO (BO) – the biological object (the part of organism with blood vessels); OEП (OET) – the optoelectronic transformer, which includes the block of radiation (ББ (BR)), the optical channel (OK (OC)), the reception of reflected radiation block (БПБ (BR)); БРР (BRR) – the registration of realization block; БОДП (BEDP) – the statistical estimating of diagnostic parameters block; БДП (BDS) – the diagnostic spaces block; БДР (BDD) – the diagnostic decisions block (BRR, BEDP, BDS and BDD are realized on PC (ПЕОМ) as the application package).

The registered realization of photoplethysmic signal is presented on the fig.3.

The probability characteristics of PPS are estimated on the base of its mathematical model (taking into account the stochastic periodicity of photoplethysmic signal).

The period of the  $T$ -periodical by Slutskiy process  $\xi(t), t \in (-\infty, \infty)$  is estimated by the statistics (9), where  $s$  is the „test” period,  $s = s_1, s_2$ ,  $(\xi_0, \dots, \xi_k, \dots, \xi_{n-1})$  is the sample from process  $\xi(t)$ , which is obtained by  $\xi(t)$  discretization with the step equal  $\Delta t$ , by  $[\cdot]$  denoted the floor function. The asymptotically unbiased and consistent estimation of period is determined as  $\hat{T} = \Delta t \max_s h_s$ . The example of statistics  $h_s$  realization is presented on fig.4.

Let  $L = \frac{T}{\Delta t} > 1$  be the integer number. The series

$\xi_{kl} = \xi(k\Delta t + lT)$ ,  $k = \overline{0, L-1}, l \in \mathbf{Z}$  (with fixed  $k$ ) is called the  $\varphi_k$ -series of periodical process  $\xi(t)$ . The main  $\varphi_k$ -serieses property (which is used for periodical random processes distribution investigation) is, that they are stationary and stationary related random serieses. It allows to determine the probability characteristics estimations by the known methods of stationary random processes statistical analysis.

The unbiased and consistent estimation of the  $\varphi_k$ -series mathematical expectation is presented by the formula (11).

Obviously  $\bar{\xi}_k$ ,  $k = \overline{0, L-1}$  is the estimation of mathematical expectation  $\mathbf{M}\xi(k\Delta t)$ ,  $k = \overline{0, L-1}$ , that is mathematical expectation of sampled  $T$ -periodical process  $\xi(t)$  on the interval  $[0, T)$  (as far as  $\mathbf{M}\xi(t)$  is the  $T$ -periodical function then it is enough to analyse it on the interval  $[0, T)$ ).

The asymptotically unbiased and consistent estimations of the samples  $R(i\Delta t, j\Delta t)$  of the correlation function  $R(t_1, t_2)$  in the area  $[0, T) \times [0, \infty)$  (it is enough for describing it on the whole domain, taking into account the periodicity of  $R(t_1, t_2)$  by the set of arguments) are presented by formula (12).

The results of the photoplethysmic signal mathematical expectation and dispersion  $R(t, t)$  estimating on the interval  $[0, T)$  are presented on the fig.5 and fig.6.

There are arguments for the adequacy of the developed mathematical model:

- the mathematical model is developed with taking into account the light-blood interaction biophysical properties, so this model is adequate to the signal under investigation;
- the stochastic periodicity of the photoplethysmic signal is confirmed by the experimental results;
- the PPS period estimations are verified by the results of heartbeats period manual measurements;
- the model characteristics are available for experimental estimating (it is adequacy to the measurements and diagnostics problems).

That is, in the article, at first, the PPS mathematical model as a linear periodical random process is developed, in the model unlike the knowns the PPS biophysical genesis, randomness and rhythmic time changes are reflected, it is available for probability analysis by the characteristic functions method.

Furthermore, the dependency of the PPS moment functions (which are the base for the diagnostic parameters identification) and LPRP characteristics using the characteristic functions method is presented.

And finally, the PPS mathematical expectation and correlation function estimations are obtained.