



## ЧАСТОТНИЙ СИМВОЛЬНИЙ МЕТОД ОЦІНКИ АСИМПТОТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ КІЛ

Юрій Шаповалов, Богдан Мандзій, Дарія Смаль

Інститут телекомунікацій, радіоелектроніки та електронної техніки  
 Національний університет "Львівська політехніка"  
 вул. С.Бандери, 12, Львів, 79013  
 shapov@polynet.lviv.ua, bmandziy@mail.ru, dariya.smal@gmail.com

**Резюме:** У статті розглянуто метод оцінки асимптотичної стійкості лінійних параметричних кіл частотним символьним методом. Метод полягає у заміні у критерії стійкості необхідного формування бічастотної передавальної функції кола на формування нормальної параметричної передавальної функції його інерційної частини. Це приводить до суттєвого спрощення методу оцінки стійкості.

**Ключові слова:** лінійні параметричні кола, оцінка асимптотичної стійкості, символьний аналіз.

## FREQUENCY SYMBOLIC METHOD OF ASSESSMENT OF ASYMPTOTIC STABILITY OF LINEAR TIME-VARIABLE CIRCUITS

Yuriy Shapovalov, Bohdan Mandziy, Dariya Smal

Institute of Telecommunications, Radioelectronics and Electronic Engineering  
 Lviv Polytechnic National University  
 12, Stepana Bandery Street, Lviv, 79013, Ukraine  
 shapov@polynet.lviv.ua, bmandziy@mail.ru, dariya.smal@gmail.com

**Abstract:** The method of assessment of asymptotic stability of linear time-variable circuits by frequency symbolic approach is considered in this paper. The method consists of the replacing in criteria of stability the necessity of formation of bifrequency transfer function of circuit on the formation of a normal parametric transfer function in its inertial part. This leads to significant simplification of the method of assessment of a stability.

**Keywords:** linear time-variable circuits, assessment of asymptotic stability, symbolic analysis.

### ВСТУП

У [1] розглянуто частотний символьний метод (ЧС-метод) аналізу лінійних параметричних кіл з періодично змінними параметрами, який оснований на диференціальному рівнянні, що пов'язує вхідний  $x$  та вихідний  $y$  сигнали:

$$\begin{aligned} a_n(t)y^{(n)} + \dots + a_1(t)y^{(1)} + a_0(t)y = \\ = b_m(t)x^{(m)} + \dots + b_1(t)x^{(1)} + b_0(t)x \end{aligned} \quad (1)$$

де  $a_i(t)$ ,  $b_j(t)$  –відомі дійсні функції часу, що визначені за заданим колом. Рівняння (1) визначає диференціальне рівняння, що описує

параметричне коло відносно спряженої передавальної функції  $W(s,t)$  у частотній області [3]:

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n A(s,t)}{ds^n} \frac{d^n W(s,t)}{dt^n} + \dots + \frac{dA(s,t)}{ds} \frac{dW(s,t)}{dt} + A(s,t)W(s,t) = B(s,t) \quad (2)$$

де  $s = j\omega$  – комплексна змінна,

$$A(s,t) = a_n(t)s^n + \dots + a_1(t)s + a_0(t),$$

$$B(s,t) = b_m(t)s^m + \dots + b_1(t)s + b_0(t).$$

У виразі (3) апроксимація  $\hat{W}(s,t)$  параметричної

передавальної функції  $W(s, t)$  у вигляді тригонометричного комплексного полінома визначається згідно ЧС-методу:

$$\hat{W}(s, t) = W_0(s) + \sum_{i=1}^k \left[ W_{-i}(s) \exp(-ji\Omega t) + W_{+i}(s) \exp(+ji\Omega t) \right], \quad (3)$$

яка містить  $k$  гармонічних складових і зв'язує вхідний  $X(s)$  та вихідний  $Y(s, t)$  сигнали заданого кола у частотній області:

$$Y(s, t) = \hat{W}(s, t) \cdot X(s), \quad (4)$$

де  $\Omega$  - основна частота зміни параметра параметричного елемента (вважається, що у колі один параметричний елемент). ЧС-метод є символічний, оскільки змінні  $s$ ,  $t$  та деякі параметри кола можуть бути задані символами.

Як витікає з [2], частотний символічний метод аналізу лінійних параметричних кіл може бути достатньо просто застосований для оцінки асимптотичної стійкості таких кіл. При цьому зручно користуватись критерієм стійкості, який за наступних позначень

а)  $w(t, \xi)$  - відгук у часі  $t$  лінійного параметричного кола при дії на його вході дельта-імпульсу, поданого у момент часу  $\xi$  (імпульсна передавальна функція кола);

б)  $W(s, r)$  - бічастотна параметрична передавальна функція [3] кола з двома комплексними змінними  $s = \sigma + j\omega$  та  $r = \mu + j\rho$ , що визначена подвійним перетворенням Лапласа функції  $w(t, \xi)$ ,

формулюється наступним чином[3]: лінійне параметричне коло є стійке асимптотично ( $0 < \xi < \infty$ ), якщо інтеграл

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |w(t, \xi)| dt d\xi \quad (5)$$

абсолютно збігається. Це вимагає визначення всіх порушень аналітичності бічастотної передавальної функції  $W(s, r)$  на площині  $\rho\sigma$  та побудови на цій основі так званої характеристики збіжності  $\rho = \chi(\sigma)$  та області  $D_1$  [3,4]. Якщо область  $D_1$  містить всередині себе точки  $\sigma < 0$ , то коло з такою характеристикою  $\rho = \chi(\sigma)$  є асимптотично стійким.

## 1. ЗАМІНА У КРИТЕРІЇ СТІЙКОСТІ БІЧАСТОТНОЇ ПЕРЕДАВАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ НОРМАЛЬНОЮ ПАРАМЕТРИЧНОЮ ПЕРЕДАВАЛЬНОЮ ФУНКЦІЄЮ

У [2] згадано, що у критерії стійкості визначення характеристики збіжності  $\rho = \chi(\sigma)$  функції  $W(s, r)$  може бути замінене визначенням коренів так званої нормальної параметричної передавальної функції кола  $W(s, \xi)$ . Вважаємо цей факт достатньо важливим і корисним, оскільки визначення функції  $W(s, \xi)$  та її коренів є суттєво простішими, ніж пошук бічастотної функції  $W(s, r)$  кола та формування для неї характеристики збіжності  $\rho = \chi(\sigma)$ . Факт такої заміни для побудови методу оцінки стійкості є принципово суттєвим, тому, на нашу думку, вимагає доведення, яке й подаємо далі.

За аналогією з (3) функція  $W(s, \xi)$  частотним символічним методом визначається у вигляді апроксимації тригонометричним поліномом:

$$\hat{W}(s, \xi) = W_0(s) + \sum_{i=1}^k \left[ W_{ci}(s) \cos(i\Omega\xi) + W_{si}(s) \sin(i\Omega\xi) \right], \quad (6)$$

де  $W_0(s), W_{ci}(s), W_{si}(s)$  - дробово-раціональні функції комплексної змінної  $s$  з однокровим знаменником  $\Delta(s)$  згідно ЧС-методу. Апроксимація (6) може бути використана для визначення функції  $W(s, r)$  до якої може бути застосований критерій. Для цього використаємо подану у [3] залежність:

$$W(s, r) = \int_0^{\infty} W(s, \xi) e^{-r\xi} d\xi. \quad (7)$$

Такий підхід до визначення стабільності відповідно до критерію є обґрунтованим, оскільки він оснований на тому, що апроксимація (6) функції  $W(s, \xi)$  дає досить простий розрахунок (7), не маючи знаменників залежних від  $\xi$  на відміну від інших відомих методів визначення  $W(s, r)$ . Так, у випадку апроксимації функції  $W(s, \xi)$  виразом (6) визначення інтеграла (7) зводиться до наступного виразу :

$$W(s, r) = W_0(s) \int_0^{\infty} e^{-r\xi} d\xi + \sum_{i=1}^k [W_{ci}(s) \int_0^{\infty} \cos(\Omega\xi) e^{-r\xi} d\xi + W_{si}(s) \int_0^{\infty} \sin(\Omega\xi) e^{-r\xi} d\xi] \quad (8)$$

Враховуючи, що інтеграли з виразу (8):

$$\int_0^{\infty} e^{-r\xi} d\xi = \frac{1}{r}, \int_0^{\infty} \cos(i\Omega\xi) e^{-r\xi} d\xi = \frac{r}{r^2 + (i\Omega)^2}, \int_0^{\infty} \sin(i\Omega\xi) e^{-r\xi} d\xi = \frac{i\Omega}{r^2 + (i\Omega)^2},$$

отримуємо вираз для бічастотної передавальної функції кола у вигляді:

$$W(s, r) = W_0(s) \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^k [W_{ci}(s) \frac{r}{r^2 + (i\Omega)^2} + W_{si}(s) \frac{i\Omega}{r^2 + (i\Omega)^2}] \quad (9)$$

У виразі (9), згідно критерію асимптотичної стійкості, необхідно визначити всі порушення аналітичності, які визначаються коренями знаменника цього виразу. З цього ж виразу (9) витікає, що його знаменник, який позначимо через  $\Delta(s, r)$  можемо записати у вигляді:

$$\Delta(s, r) = \Delta(s) \cdot r \cdot \prod_{i=1}^k (r^2 + (i\Omega)^2) \quad (10)$$

Вигляд виразу (10) переконає, що множина коренів виразу  $\Delta(s, r)$  складається з множини коренів полінома  $\Delta(s)$  функції  $W(s, \xi)$  та коренів:

$$r_0 = 0, r_{1,2} = \pm j\Omega, r_{3,4} = \pm j2\Omega, \dots, r_{2k-1,2k} = \pm jk\Omega. \quad (11)$$

Оскільки дійсні частини всіх коренів у (11) є нульові, то на площині  $\rho\sigma$  вони будуть представлені накладеними одна на одну прямими лініями, що зливаються з віссю  $\sigma$ . Дійсні частини коренів поліному  $\Delta(s)$  з (6) у площині  $\rho\sigma$  будуть представлені прямими лініями, паралельними осі  $\rho$  які перетинають вісь  $\sigma$  через значення дійсної частини кореня. Характеристика збіжності  $\rho = \chi(\sigma)$  у цьому

випадку буде мати вигляд прямого кута, одна сторона якого лежить на осі  $\sigma$  інша – на вертикальній лінії, що відповідає кореню  $\Delta(s)$  з найбільшою дійсною частиною, та вершина розташована у точці, де ця лінія перетинає вісь  $\sigma$ . Побудований таким чином прямий кут максимально включає верхній правий квадрант площини  $\rho\sigma$  чим і утворює область  $D_1$ . Очевидно, що у такому випадку область  $D_1$  не включає точки з  $\rho < 0$  та: а) включає точки з  $\sigma < 0$ , якщо найбільша дійсна частина серед дійсних частин усіх коренів  $\Delta(s)$  від'ємна, або б) не включає точки з  $\sigma < 0$ , якщо найбільша дійсна частина серед дійсних частин усіх коренів  $\Delta(s)$  рівна нулю чи додатна. Очевидно, що у випадку (а) коло стійке, у випадку (б) – нестійке. Виходячи з способу побудови області  $D_1$  і попередніх міркувань можна зробити висновок: апроксимація  $\hat{W}(s, t)$  у вигляді (6) зводить проблему оцінки асимптотичної стійкості кола з аналізу характеристики збіжності  $\rho = \chi(\sigma)$  функції  $W(s, r)$  до звичайного знаходження найбільшої дійсної частини серед дійсних частин усіх коренів знаменника  $\Delta(s)$  нормальної функції передачі кола  $W(s, \xi)$  [5].

Наведений висновок отриманий для випадку апроксимації нормальної передавальної функції  $W(s, \xi)$  тригонометричним поліномом (6). З іншого боку як показано у [6], що з точки зору ефективності частотного символного методу апроксимація функції  $W(s, \xi)$  тригонометричним експоненціальним поліномом

$$\hat{W}(s, \xi) = W_{\pm 0}(s) + \sum_{i=1}^k [W_{-i}(s) \cdot \exp(-ji\Omega\xi) + W_{+i}(s) \cdot \exp(+ji\Omega\xi)] \quad (12)$$

у порівнянні з тригонометричним рядом (6) є набагато привабливіша і дозволяє розв'язувати задачі суттєво вищих порядків складності. У виразі (12)  $W_{\pm 0}(s), W_{-i}(s), W_{+i}(s)$  незалежні від часу  $t$  дробово-раціональні функції комплексної змінної  $s$  що згідно частотного символного методу мають однаковий знаменник, який далі позначатимемо через  $\Delta(s)$ . Такий факт, дійсно, має місце, хоча, здавалось би, що форма полінома не має суттєво впливати на хід і особливості обчислювального процесу. Таким чином, якщо обчислення  $W(s, \xi)$  доцільніше проводити за апроксимацією (12) то й виникає необхідність перевірити можливості цієї

апроксимації у задачах оцінки асимптотичної стійкості лінійних параметричних кіл при їх аналізі частотним символьним методом.

Перевіримо це на підставі наведених міркувань. Також можемо спостерігати, що зв'язок дробово-раціональних функцій (6) та (12) має вигляд :

$$W_0(s) = 2W_{\pm 0}(s), W_{ci}(s) = W_{-i}(s) + W_{+i}(s), W_{si}(s) \Rightarrow \text{вигляді тригонометричного (6) чи тригонометричного комплексного (12) полінома зводить проблему оцінки асимптотичної стійкості кола від аналізу характеристики збіжності } \rho = \chi(\sigma) \text{ функції } W(s, r) \text{ до звичайного знаходження найбільшої дійсної частини серед усіх дійсних всіх коренів знаменника } \Delta(s) \text{ нормальної функції передачі кола } W(s, \xi). \text{ На додаток до цього для оцінки асимптотичної стійкості лінійного параметричного кола, згідно критерію 2 буде достатньо: а) знайти нормальну передавальну функцію } \hat{W}(s, \xi) \text{ цього кола ЧС-методом у вигляді тригонометричного полінома (6) чи (12); б) знайти корені знаменника } \Delta(s) \text{ функції } \hat{W}(s, \xi); \text{ в) визначити серед коренів поліному } \Delta(s) \text{ наявність коренів з нульовою або додатною дійсними частинами. Якщо такі корені існують, то коло нестійке, якщо ні – то коло стійке асимптотично.}$$

$$= j[W_{-i}(s) - W_{+i}(s)]$$

то, очевидно, що при однакових  $k$  їх відповідні знаменники  $\Delta_t(s)$  та  $\Delta_e(s)$  рівні. Позначимо їх через  $\Delta(s)$ .

Функція  $W(s, r)$  може бути знайдена з виразу (7) при апроксимації функції  $W(s, \xi)$  рядом (12).

$$W(s, r) = W_{\pm 0}(s) \int_0^{\infty} e^{-r\xi} d\xi + \sum_{i=1}^k [W_{-i}(s) \int_0^{\infty} e^{-j\Omega\xi} e^{-r\xi} d\xi + W_{+i}(s) \int_0^{\infty} e^{+j\Omega\xi} e^{-r\xi} d\xi] \quad (13)$$

Враховуючи, що:

$$\int_0^{\infty} e^{-r\xi} d\xi = \frac{1}{r}, \int_0^{\infty} e^{-j\Omega\xi} e^{-r\xi} d\xi = \frac{1}{r + j\Omega}, \int_0^{\infty} e^{+j\Omega\xi} e^{-r\xi} d\xi = \frac{1}{r - j\Omega}$$

отримуємо вираз для бічастотної передавальної функції кола у вигляді:

$$W(s, r) = W_{\pm 0}(s) \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^k [W_{-i}(s) \frac{1}{r + j\Omega} + W_{+i}(s) \frac{1}{r - j\Omega}] \quad (14)$$

У виразі (14), згідно критерію асимптотичної стійкості [4], необхідно визначити всі порушення аналітичності, які визначаються коренями його знаменника. З цього ж виразу (14) витікає, що його знаменник, можемо записати у вигляді:

$$\Delta(s, r) = \Delta(s) \cdot r \cdot \prod_{i=1}^k [(r - j\Omega) \cdot (r + j\Omega)] \quad (15)$$

що рівне виразу для  $\Delta(s, r)$  у (8). Рівність виразів (10) та (15) показує рівність їхніх коренів. Рівність коренів оцінюється для знаменників

$\Delta(s, r)$  бічастотних передавальних функцій  $W(s, r)$  які визначені при апроксимації (6) та (12) означає, що всі висновки, зроблені в першому випадку також підходить для другого. Нарешті, ми можемо зробити дуже важливий висновок, який підходить для обох апроксимацій функції  $W(s, \xi)$ : апроксимація функції  $\hat{W}(s, \xi)$

## 2. ЗАМІНА У КРИТЕРІЇ СТІЙКОСТІ НОРМАЛЬНОЇ ПЕРЕДАВАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ КОЛА НОРМАЛЬНОЮ ПЕРЕДАВАЛЬНОЮ ФУНКЦІЄЮ ЙОГО ІНЕРЦІЙНОЇ ЧАСТИНИ

Нормальна параметрична передавальна функція лінійного параметричного кола  $W(s, \xi)$  зазвичай визначається з диференціального рівняння (1), що описує коло, за наступною залежністю [3]:

$$W(s, \xi) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \frac{1}{i!} \frac{d^i B(s, \xi)}{ds^i} \cdot \frac{d^i G(s, \xi)}{d\xi^i}, \quad (16)$$

у якій  $G(s, \xi)$  – нормальна параметрична передавальна функція інерційної [3] частини кола;  $B(s, \xi)$  є поліном

$$B(s, \xi) = B_0(\xi) + B_1(\xi)s + B_2(\xi)s^2 + \dots + B_m(\xi)s^m \quad (17)$$

з коефіцієнтами  $B_0(\xi) = B_0(\xi, q)$ ,

$B_i(\xi) = B_i(\xi, q)$ , що визначені за формулами

$$B_0(\xi, q) = B_0(\xi) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{d^k b_k(\xi)}{d\xi^k}, \quad (18)$$

$$B_i(\xi, q) = (-1)^i \frac{1}{i!} \frac{d^i [B_0(\xi, q)]}{dq^i}, q = \frac{d}{d\xi}. \quad (19)$$

При чому присутня у (16) функція  $G(s, \xi)$  визначається з рівняння [3]:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{d^k A(s, \xi)}{ds^k} \cdot \frac{d^k G(s, \xi)}{d\xi^k} = 1, \quad (20)$$

у якому  $A(s, \xi)$  своєю чергою, є поліном

$$A(s, \xi) = A_0(\xi) + A_1(\xi)s + A_2(\xi)s^2 + \dots + A_m(\xi)s^m \quad (21)$$

з коефіцієнтами  $A_0(\xi) = A_0(\xi, q)$ ,  $A_i(\xi) = A_i(\xi, q)$ , що визначаються за формулами

$$A_0(\xi, q) = A_0(\xi) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{d^k a_k(\xi)}{d\xi^k}, \quad (22)$$

$$A_i(\xi, q) = (-1)^i \frac{1}{i!} \frac{d^i [A_0(\xi, q)]}{dq^i}, q = \frac{d}{d\xi}. \quad (23)$$

З формул (20) – (23) витікає, що функція  $G(s, \xi)$  визначається коефіцієнтами лівої частини рівняння (1), що описує лінійне параметричне коло, а з формул (16) – (19) витікає, що функція  $W(s, \xi)$  перераховується з функції  $G(s, \xi)$  за допомогою коефіцієнтів правої частини рівняння (1). Як функція  $G(s, \xi)$ , так і функція  $W(s, \xi)$ , за частотним символьним методом їх визначення є дробово-раціональними функціями комплексної змінної  $s$ .

Проілюструємо використання формул (16) – (19) на прикладі деякого параметричного кола, яке за аналогією з (1) описане диференціальним рівнянням, нехай, третього порядку:

$$a_3(t)y''' + a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = b_2(t)x'' + b_1(t)x' + b_0(t)x. \quad (24)$$

Замінюючи у рівнянні (24)  $t$  на  $\xi$  та застосовуючи до нього вирази (18), (19) отримуємо:

$$B_0(\xi, q) = B_0(\xi) = \sum_{k=0}^2 (-1)^k \frac{d^k b_k(\xi)}{d\xi^k} = b_0(\xi) - \frac{db_1(\xi)}{d\xi} + \frac{d^2 b_2(\xi)}{d\xi^2} = b_0(\xi) - b_1(\xi)q + b_2(\xi)q^2$$

де

$$B_1(\xi, q) = (-1)^1 \frac{1}{1!} \frac{dB_0(\xi, q)}{dq} = b_1(\xi) - 2b_2(\xi)q,$$

$$B_2(\xi, q) = (-1)^2 \frac{1}{2!} \frac{d^2 B_0(\xi, q)}{dq^2} = b_2(\xi).$$

З виразів (17), (25) маємо:

$$B(s, \xi) = [b_0(\xi) - \frac{db_1(\xi)}{d\xi} + \frac{d^2 b_2(\xi)}{d\xi^2}] + [b_1(\xi) - 2\frac{b_2(\xi)}{d\xi}]s + b_2(\xi)s^2 \quad (26)$$

З виразів (16) та (26) остаточно отримаємо:

$$W(s, \xi) = B(s, \xi) \cdot G(s, \xi) - \frac{d[B(s, \xi)]}{ds} \cdot \frac{dG(s, \xi)}{d\xi} + \frac{1}{2} \frac{d^2 [B(s, \xi)]}{ds^2} \cdot \frac{d^2 G(s, \xi)}{d\xi^2} = [[b_0(\xi) - \frac{db_1(\xi)}{d\xi} + \frac{d^2 b_2(\xi)}{d\xi^2}] + [b_1(\xi) - 2\frac{b_2(\xi)}{d\xi}]s + b_2(\xi)s^2] \cdot G(s, \xi) - [[b_1(\xi) - 2\frac{b_2(\xi)}{d\xi}] + 2b_2(\xi)s] \cdot \frac{dG(s, \xi)}{d\xi} + b_2(\xi) \cdot \frac{d^2 G(s, \xi)}{d\xi^2}.$$

Звернувши увагу на вираз (27) з точки зору полюсів дробово-раціональних функцій  $W(s, \xi)$  та  $G(s, \xi)$  робимо наступні зауваження:

- як відомо, полюси дробово-раціональної функції визначаються тільки коренями її знаменника;
- у рівнянні (27) знаменники присутні тільки у виразах  $W(s, \xi)$ ,  $G(s, \xi)$  та  $\frac{d^i G(s, \xi)}{d\xi^i}$  і відсутні у інших членах цього рівняння;
- диференціювання дробово-раціональної функції  $G(s, \xi)$  у членах  $\frac{d^i G(s, \xi)}{d\xi^i}$

відбувається тільки по змінній  $\xi$ , тому за апроксимацією  $\ddot{\xi}$ , наприклад, тригонометричним поліномом

$$G(s, \xi) = G_0(s) + \sum_{i=1}^k \left[ G_{ci}(s) \cos(i\Omega\xi) + G_{si}(s) \sin(i\Omega\xi) \right], \quad (28)$$

де  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $T$  - період зміни параметричного

елемента кола, похідні  $\frac{d^i G(s, \xi)}{d\xi^i}$  мають вигляд

$$\frac{d^i G(s, \xi)}{d\xi^i} = \sum_{j=1}^k \left[ G_{cj}(s) [\cos(i\Omega\xi)]^{(i)} + G_{sj}(s) [\sin(i\Omega\xi)]^{(i)} \right] \quad (29)$$

і тому мають такий же знаменник, що і функція  $G(s, \xi)$  (можна показати, що дане твердження справедливе і для загального вигляду диференціального рівняння (1), а також за апроксимацією функції  $G(s, \xi)$  і тригонометричним комплексним поліномом);

- таким чином знаменник у функціях  $G(s, \xi)$ ,

$$\frac{d^i G(s, \xi)}{d\xi^i} \text{ та } W(s, \xi) \text{ у виразах (27) та (16)}$$

однаковий.

Згідно наведених зауважень можемо зробити наступні три важливі висновки.

- Оскільки знаменники функцій  $G(s, \xi)$  та  $W(s, \xi)$  у виразі (16) однакові, то й корені цих знаменників однакові.
- Оцінку стійкості параметричного кола правомірно проводити за коренями знаменника функції  $G(s, \xi)$ , без обчислення функції  $W(s, \xi)$ .
- Оскільки функція  $G(s, \xi)$  визначається коефіцієнтами тільки лівої частини рівняння (1), то й на оцінку стійкості кола впливають коефіцієнти тільки лівої частини рівняння (1) (інерційної частини параметричного кола), і не впливають коефіцієнти правої частини рівняння (1) (форсованої частини параметричного кола) [3].

### 3. ПРИКЛАД

Провести оцінку стійкості одноконтурного параметричного підсилювача з параметричною індуктивністю, який показано на рис. 1.

Нормальна параметрична передавальна

функція  $W(s, \xi)$  від струму сигналу  $i_1(t)$  у напругу  $u_1(t)$  для кола з рис.1, визначена частотним символьним методом [2] у вигляді тригонометричного

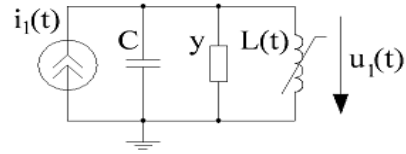


Рис. 1 – Одноконтурний параметричний підсилювач

$$i_1(t) = I_m \cos(\omega t + \phi); I_m = 0.0001A; \omega = 2 \cdot \pi \cdot 10^8 \text{ рад/с};$$

$$L(t) = L_0 \cdot (1 + m \cos(\Omega t)); L_0 = 0.2533 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}; \Omega = 2 \cdot \omega;$$

$$\phi = \pi/4; y = 0.0004 \text{ См}; C = 10 \cdot 10^{-12} \text{ Ф};$$

полінома, наприклад при  $k=1$ , має вигляд:

$$\hat{W}(s, \xi) = \frac{w_{-1}(s)}{\Delta(s)} \cdot \exp(-j\Omega\xi) + \frac{w_0(s)}{\Delta(s)} + \frac{w_{+1}(s)}{\Delta(s)} \cdot \exp(j\Omega\xi), \quad (30)$$

де

$$w_{-1}(s) = w_{-1}(s, m) = 0.40 \cdot 10^{-60} s^4 \cdot m + (0.32 \cdot 10^{-52} - 0.50 \cdot 10^{-51} i) \cdot m \cdot s^3 + (0.79 \cdot 10^{-42} - 0.40 \cdot 10^{-43} i) \cdot m \cdot s^2 + (0.63 \cdot 10^{-35} - 0.60 \cdot 10^{-33} i) \cdot m \cdot s;$$

$$w_0(s) = w_0(s, m) = -0.11 \cdot 10^{-23} - 0.80 \cdot 10^{-60} s^4 - 0.64 \cdot 10^{-52} s^3 + (-0.32 \cdot 10^{-41} + 0.16 \cdot 10^{-50} i) \cdot s^2 + (-0.13 \cdot 10^{-33} + 0.32 \cdot 10^{-43} i) \cdot s;$$

$$w_{+1}(s) = w_{+1}(s, m) = 0.40 \cdot 10^{-60} s^4 \cdot m + ((0.16 \cdot 10^{-52} + 0.50 \cdot 10^{-51} j) \cdot m + 0.16 \cdot 10^{-52} m) \cdot s^3 + ((-0.47 \cdot 10^{-42} + 0.20 \cdot 10^{-43} j) \cdot m + (0.51 \cdot 10^{-18} + 0.32 \cdot 10^{-16} j) \cdot$$

$$\cdot (0.13 \cdot 10^{-26} m - 0.40 \cdot 10^{-25} j \cdot m) \cdot s^2 + (-0.15 \cdot 10^{-7} + 0.64 \cdot 10^{-9} j)(0.13 \cdot 10^{-26} m - 0.40 \cdot 10^{-25} j \cdot m) \cdot s;$$

$$\Delta(s) = \Delta(s, m) = (-0.16 \cdot 10^{-52} + 0.81 \cdot 10^{-53} m^2) \cdot s^6 + (-0.20 \cdot 10^{-44} + 0.98 \cdot 10^{-45} m^2) \cdot s^5 + (-0.71 \cdot 10^{-34} + 0.29 \cdot 10^{-34} m^2) \cdot s^4 + (-0.56 \cdot 10^{-26} + 0.23 \cdot 10^{-26} \cdot m^2) \cdot s^3 + (-0.48 \cdot 10^{-16} + 0.15 \cdot 10^{-16} m^2) \cdot s^2 +$$

$$+ (-0.19 \cdot 10^{-8} + 0.61 \cdot 10^{-9} m^2) \cdot s - 9.$$

$m$  - глибина модуляції індуктивності  $L(t)$ .

Вираз (30) є розв'язком наступного диференціального рівняння [1]:

$$\begin{aligned}
 & [1 + (-CL'(\xi) + L(\xi)Y)s + CL(\xi)s^2] \cdot W(s, \xi) + \\
 & + (CL'(\xi) - L(\xi)Y - 2CL(\xi)s) \cdot W'(s, \xi) + \quad (31) \\
 & + CL(\xi) \cdot W''(s, \xi) = 1,
 \end{aligned}$$

яке, своєю чергою [3], витікає з диференціального рівняння, що описує коло рис. 1:

$$\begin{aligned}
 & CL(t) \cdot u_1''(t) + [CL'(t) + yL(t)] \cdot u_1'(t) + \\
 & + (1 + yL'(t)) \cdot u_1(t) = L'(t)i_1(t) + L(t)i_1'(t). \quad (32)
 \end{aligned}$$

На рис. 2 наведено траєкторії коренів у площині  $\sigma j\omega$ , які отримані при зміні  $m$  від 0,05 до 0,14 і при шести гармоніках у апроксимації  $\hat{W}(s, \xi)$ . Початок кожної траєкторії позначений символом "x" та у кінці траєкторії розташований номер кореня, який її утворює.

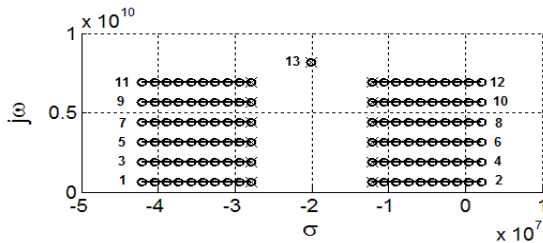


Рис. 2 – Траєкторії коренів знаменника  $\Delta(s, m)$  функції  $\hat{W}(s, \xi)$  кола з рис. 1 при зміні  $m$  від 0.05 до 0.14 і для шести гармонік у апроксимації

Кожному кореню з рис. 2 відповідає комплексно спряжений корінь. Траєкторії цих спряжених коренів є симетричні відносно осі  $\sigma$  і на рис. 2 не наведені.

Фрагмент траєкторії кореня 2 для значень  $m$  від 0,124 до 0,130 з кроком 0,002 представлений на рис. 3 у збільшеному масштабі і, як видно з рисунку, перетинає вісь  $j\omega$  коли  $m = 0.127 \pm 0.0005$ . Це означає, що при  $m < 0.127$  коло з рис.1 асимптотично стійке, а при  $m \geq 0.127$  – нестійке. Цей результат повністю збігається з результатом, наведеним на рис. 4, який отримано для кола з рис.1 числовим методом за програмою аналізу електричних кіл Micro-Cap 7.

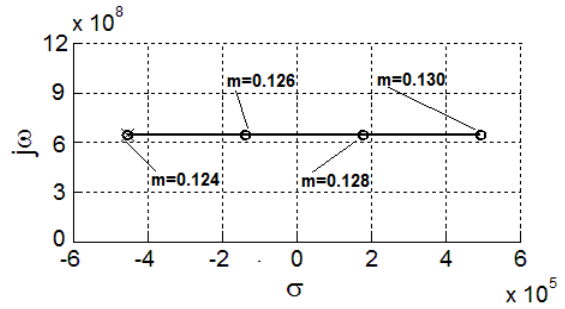


Рис. 3 – Траєкторія кореня 2 при зміні  $m$  від 0.124 до 0.130 з кроком 0.002. Початок траєкторії позначено символом "x"

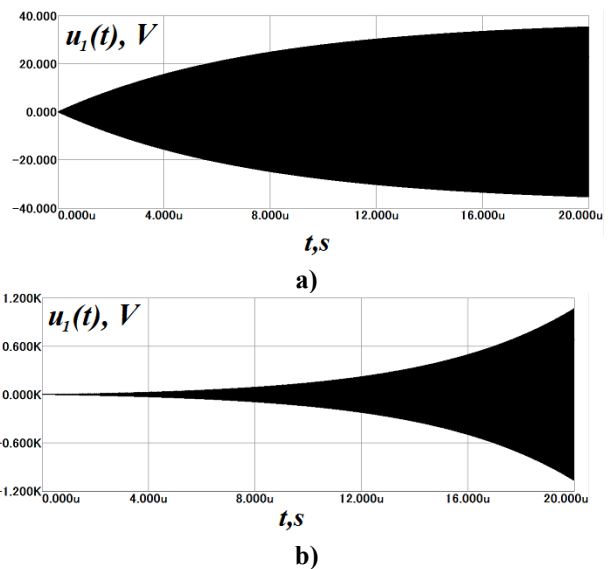


Рис. 4 – Часові залежності напруги  $u_1(t)$  для кола з рис. 1, отримані за програмою Micro-Cap: а) –  $m = 0.126$ , коло стійке; б) –  $m = 0.128$ , коло нестійке

## ВИСНОВКИ

Як витікає з наведеного вище, запропонований у статті метод оцінки асимптотичної стійкості лінійних параметричних кіл, на відміну від описаних у літературі [3], полягає у перенесенні цієї оцінки з аналізу коренів знаменника бічастотної функції  $W(s, r)$  обраного критерію, оминаючи обчислення функції  $W(s, \xi)$ , у аналіз коренів знаменника функції  $G(s, \xi)$  заданого параметричного кола. Оскільки функція  $G(s, \xi)$  визначається тільки лівою частиною рівняння (1), то на відміну від описаного, наприклад, у [3], можемо говорити про аналогію з колами з постійними параметрами, для яких відомо, що стійкість кола визначається тільки лівою частиною диференціального рівняння (іншими словами, характеристичним поліномом), що описує коло з постійними параметрами.

Зауважимо, що перенесення визначення оцінки асимптотичної стійкості лінійного параметричного кола з аналізу коренів знаменника бічастотної функції  $W(s, r)$  у аналіз коренів знаменника функції  $G(s, \xi)$  за обчислювальним сенсом суттєво спрощує та прискорює розв'язування задачі оцінки стійкості кола, оскільки робить непотрібним формування функцій  $W(s, r)$  та  $W(s, \xi)$ , а передбачає визначення тільки знаменника функції  $G(s, \xi)$ .

У [1] наведені результати оцінки стійкості одноконтурного та двоконтурного параметричних підсилювачів за описаним методом. Результати оцінки повністю збігаються з результатами, отриманими за широковідомою програмою аналізу кіл Micro-Cap 7.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Shapovalov Yu., Mandziy B., Mankovsky S., The peculiarities of analysis of linear parametric circuit performed by frequency-symbolic method, *Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review)*, (86) 1 (2010), pp. 158-160.
- [2] Shapovalov Yu., Mandziy B., Mankovsky S., Peculiarities of frequency-symbolic method applied to parametric circuit analysis, *Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review)*, (86) 5 (2010), pp. 155-159.
- [3] Solodov A. V., Petrov F. S., *Linear Automatic Systems with Variable Parameters*, Moscow, Nauka, 1971, 620 p. (in Russian)
- [4] Briker I. N., About frequency analysis of linear systems with variable parameters, *Automatics and telemekhanics*, (8) (1966), pp. 43-54. (in Russian)
- [5] Shapovalov Yu. I., The peculiarities of assessment of asymptotic stability of linear parametric circuits performed by frequency symbolic method, *Simulation and information technology. Collection of scientific papers IPME NAS of Ukraine*, Kyiv, (55) (2010), pp. 126-133. (in Ukrainian)
- [6] Shapovalov Yu. I., Mankowsky S. V., Application of topological methods to frequency symbolic analysis of linear parametric circuits,

*Bulletin of Lviv Polytechnic National University "Radio electronics and telecommunications"*, (618) (2008), pp. 76-81. (in Ukrainian)



**Мандзій Богдан Андрійович**, професор, доктор технічних наук, професор кафедри "Теоретична радіотехніка і радіовимірювання" Національного університету "Львівська політехніка". Стаж педагогічної діяльності у вищій школі близько 40 років. Автор понад 250 наукових

та науково-педагогічних праць, в тому числі 2 монографій та 6 навчальних посібників з грифом Міністерства освіти України.

Наукові інтереси – методи автоматизованого аналізу нелінійних електронних кіл і забезпечення надійності радіоелектронних пристроїв і засобів телекомунікацій.



**Шаповалов Юрій Іванович**, доцент, кандидат технічних наук, доцент кафедри "Радіоелектронних пристроїв і систем" Національного університету "Львівська політехніка". Автор понад 30 наукових праць.

Наукові інтереси – частотний символічний метод аналізу лінійних параметричних кіл.



**Смаль Дарія Романівна**, аспірант кафедри "Радіоелектронних пристроїв і систем" Національного університету "Львівська політехніка".

Наукові інтереси – дослідження стійкості лінійних параметричних кіл частотним символічним методом та частотні символічні моделі.





## FREQUENCY SYMBOLIC METHOD OF ASSESSMENT OF ASYMPTOTIC STABILITY OF LINEAR TIME-VARIABLE CIRCUITS

Yuriy Shapovalov, Bohdan Mandziy, Dariya Smal

Institute of Telecommunications, Radioelectronics and Electronic Engineering  
 Lviv Polytechnic National University  
 12, Stepana Bandery Street, Lviv, 79013, Ukraine  
 shapov@polynet.lviv.ua, bmandziy@mail.ru, dariya.smal@gmail.com

**Abstract:** *The method of assessment of asymptotic stability of linear time-variable circuits by frequency symbolic approach is considered in this paper. The method consists of the replacing in criteria of stability the necessity of formation of bifrequency transfer function of circuit on the formation of a normal parametric transfer function in its inertial part. This leads to significant simplification of the method of assessment of a stability.*

**Keywords:** *linear time-variable circuits, assessment of asymptotic stability, symbolic analysis.*

### 1. INTRODUCTION

Frequency symbolic method of analysis of linear parametric circuits with periodically variable parameters which allows for a known input signal  $X(s)$  using the parametric transfer function  $W(s, t)$  to determine the output signal  $Y(s, t)$  in frequency domain is considered in [1]:

$$y(s, t) = \hat{W}(s, t) \cdot x(s), \quad (1)$$

where  $s, t$  – complex variable and time variable, respectively. The approximation  $\hat{W}(s, t)$  of parametric transfer function  $W(s, t)$  is determined in the form of trigonometric polynomial which contains  $k$  harmonic components. Frequency symbolic method is symbolic as variables  $s, t$  and some parameters of the circuit can be in the form of symbols.

As follows from [2], frequency symbolic method of analysis of LPTV circuits can be simply applied to evaluate the asymptotic stability of such circuits. It is convenient to use the criterion of stability, which is given in [3].

### 2. CHANGING BIFREQUENCY TRANSFER FUNCTION BY NORMAL TRANSFER FUNCTION IN THE CRITERIA OF STABILITY

In [2] mentioned that in criteria of stability [3] determining of coincidence characteristics

$\rho = \chi(\sigma)$  of function  $W(s, r)$  may be replaced by determining the roots of normal parametric transfer function of circuit  $W(s, \xi)$ . We consider this fact quite important and useful because determining the function  $W(s, \xi)$  and its roots are much easier than searching bifrequency function  $W(s, r)$  and forming coincidence characteristics  $\rho = \chi(\sigma)$  for it.

By analogy with parametric transfer function  $W(s, t)$  [1], function  $W(s, \xi)$  by frequency symbolic method is defined as an approximation by trigonometric polynomial:

$$\hat{W}(s, \xi) = W_0(s) + \sum_{i=1}^k \left[ \begin{array}{l} W_{ci}(s) \cos(i\Omega\xi) + \\ + W_{si}(s) \sin(i\Omega\xi) \end{array} \right], \quad (2)$$

or by complex trigonometric polynomial:

$$\hat{W}(s, \xi) = W_0(s) + \sum_{i=1}^k \left[ \begin{array}{l} W_{-i}(s) \exp(-ji\Omega\xi) + \\ + W_{+i}(s) \exp(+ji\Omega\xi) \end{array} \right], \quad (3)$$

where  $W_0(s), W_{ci}(s), W_{si}(s)$  and  $W_0(s), W_{+i}(s), W_{-i}(s)$  – fractionally rational functions of  $s$  with the same denominator  $\Delta(s)$  according to frequency symbolic method. The approximation (2) or (3) can be used to determine the function  $W(s, r)$  to which the criterion can be applied [2].

As follows the approximation of the function  $\hat{W}(s, \xi)$  in the form of trigonometric (2) or complex trigonometric (3) polynomial changes the task of assessment of asymptotic stability of the circuit from the analysis of convergence characteristic  $\rho = \chi(\sigma)$  of function  $W(s, r)$  to the ordinary finding of the most real part among real parts of all roots of denominator  $\Delta(s)$  of the normal transfer function of the circuit  $W(s, \xi)$  [4]. In addition to this for the assessment of asymptotic stability of linear time-variable circuit according to criterion it will be enough: a) to find normal transfer function  $\hat{W}(s, \xi)$  of this circuit by frequency symbolic method in the form of trigonometric polynomial (2) or (3); b) to find the roots of denominator  $\Delta(s)$  of the function  $\hat{W}(s, \xi)$ ; c) to determine the roots with null or positive real parts among roots of polynomial  $\Delta(s)$ . If such roots exist the circuit is unstable but if they do not exist the circuit is stable asymptotically.

### 3. CHANGING NORMAL TRANSFER FUNCTION OF CIRCUIT BY TRANSFER FUNCTION OF TS INERTIAL PART IN THE CRITERIA OF STABILITY

Normal parametric transfer function of linear time-variable circuit  $W(s, \xi)$  is usually determined by the differential equation, which describes a circle [1], using the following dependence [3]:

$$W(s, \xi) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \frac{1}{i!} \frac{d^i B(s, \xi)}{ds^i} \cdot \frac{d^i G(s, \xi)}{d\xi^i}, \quad (4)$$

Where  $G(s, \xi)$  – the normal parametric transfer function of inertial part [3] of the circuit;  $B(s, \xi)$  is a polynomial  $B(s, \xi) = B_0(\xi) + B_1(\xi)s + \dots + B_m(\xi)s^m$ .

1) The denominators of the functions  $G(s, \xi)$  and  $W(s, \xi)$  in expression (4) are identical, and then the roots of the denominators are equal.

2) Assessment of stability of the linear time-variable circuit is legitimate to carry out by the roots of the denominator of function  $G(s, \xi)$ , without computing function  $W(s, \xi)$ .

3) Since the function  $G(s, \xi)$  is determined by coefficients only of the left part of equation, which connects input  $x(t)$  and output  $y(t)$  signals and there is affect to assessment of the stability of circuit by coefficients only of the left part of this equation (the inertial part of linear time-variable circuit) and no affect by the coefficients of the right side of this equation (forced part of the time-variable range) [3].

## 4. EXAMPLE

To carry out the assessment of stability of single-circuit parametric amplifier, with periodically time-variable inductivity, shown in fig.1.

## 5. CONCLUSIONS

1. Transfer definition of assessment of asymptotic stability of LPTV circuit from the analysis of roots of the denominator of bifrequency function  $W(s, r)$  in analysis of roots of the denominator of function  $G(s, \xi)$  for computing the meaning simplifies and speeds up the solving task of assessment of stability circuit, because it makes unnecessary the formation function  $W(s, r)$  and  $W(s, \xi)$ , but provides identifying only the denominator of function  $G(s, \xi)$ .

2. Function  $G(s, \xi)$  is determined only by the left part of equation, which connects input and output signals in contrast to the described, for example, [3] can talk about the analogy with the circles of constant parameters for which it is known that the stability of circuit is determined only by the left part of the differential equation (in other words, characteristic polynomial), which describes a circle with constant parameters.

In [1] presented results of the assessment of stability single-circuit and double-circuit parametric amplifiers, in which periodically time-variable is capacity, by the described method. They also coincide completely with the results obtained by well known programme MicroCap 7 which analyses electric circuits.

## 6. REFERENCES

- [1] Shapovalov Yu., Mandziy B., Mankovsky S., The peculiarities of analysis of linear parametric circuit performed by frequency-symbolic method, *Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review)*, (86) 1 (2010), pp. 158-160.
- [2] Shapovalov Yu., Mandziy B., Mankovsky S., Peculiarities of frequency-symbolic method applied to parametric circuit analysis, *Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review)*, (86) 5 (2010), pp. 155-159.
- [3] Solodov A. V., Petrov F. S., *Linear Automatic Systems with Variable Parameters*, Moscow, Nauka, 1971, 620 p. (in Russian)
- [4] Shapovalov Yu. I., The peculiarities of assessment of asymptotic stability of linear parametric circuits performed by frequency symbolic method, *Simulation and information technology. Collection of scientific papers IPME NAS of Ukraine*, Kyiv, (55) (2010), pp. 126-133. (in Ukrainian)