



## МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ УЛУЧШЕННЫХ ВЕЙВЛЕТОВ ПУТЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКА СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОНТУРНОЙ СЕГМЕНТАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Марина Полякова, Виктор Крылов, Наталья Волкова

Одесский национальный политехнический университет, пр. Шевченко, 1, Одесса, 65044, Украина,  
marina\_polyakova@rambler.ru

**Резюме:** В данной работе разработан метод построения улучшенных вейвлетов для задачи контурной сегментации изображений путем преобразования графика степенной функции.

**Ключевые слова:** контурная сегментация изображений, улучшенные вейвлеты.

## THE METHOD OF WAVELETS CONSTRUCTION BY TRANSFORMATION OF A GRAPH OF POWER FUNCTION FOR EDGE DETECTION

Marina Polyakova, Victor Krylov, Natalya Volkova

Odessa National Politechnic University, 1, Shevchenko prospect, Odessa, 65044, Ukraine,  
marina\_polyakova@rambler.ru

**Abstract:** In this paper the method to construct the improved wavelets by transformation of a graph of power function is developed for the edge detection.

**Keywords:** Underlining of edges, Edge detection, Improved wavelets.

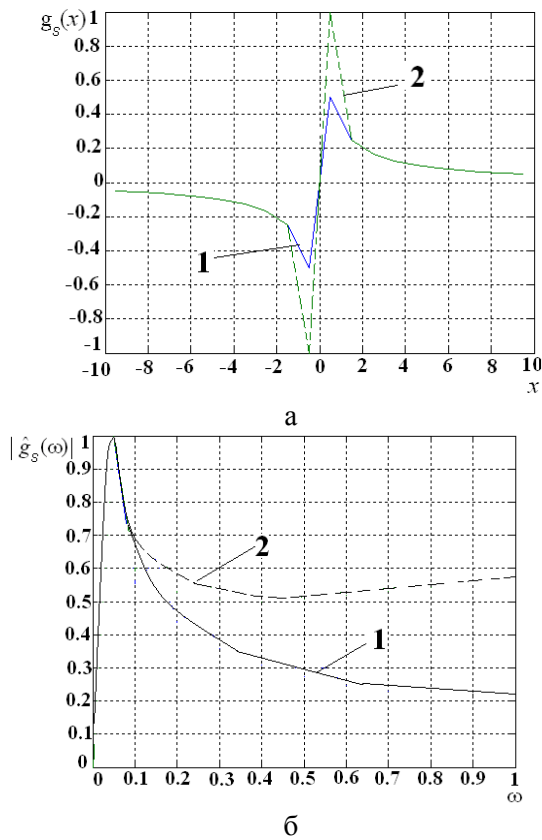
### ВВЕДЕНИЕ

Процедура контурной сегментации изображений применяется в системах компьютерного распознавания зрительных образов для снижения объема обрабатываемой информации и обеспечения инвариантности к трансформациям интенсивности. Признаком, по которому производится разбиение изображения на однородные области, является наличие перепада интенсивности.

В значительной части встречающихся практических задач объекты распознавания имеют иерархическую структуру (объект-подобъект). Для таких задач или для задач анализа сцен необходимо различать объекты на изображении не только по величине перепада интенсивности, но и по их геометрическим размерам. В этом случае контурную сегментацию изображений целесообразно производить в пространстве вейвлет-преобразования (ВП).

При выборе вида ВП, как правило, учитываются требования к помехоустойчивости контурной сегментации и погрешности определения координат точек перепадов интенсивности. В [1] построена новая система вейвлет-функций на основе однородных обобщенных функций, позволяющая уменьшить погрешность определения координат точек перепадов интенсивности изображения в задаче контурной сегментации. В качестве способа построения новой системы вейвлет-функций был выбран лифтинг [2], использующий для определения пространственно-частотной локализации составляющих изображения исходную пространственную область. В результате с помощью лифтинга были модифицированы коэффициенты фильтра, полученного путем дискретизации степенной функции (рис. 1); на основе модифицированного фильтра построена система улучшенных вейвлет-функций для задачи контурной

сегментации изображений; предложен метод контурной сегментации изображений в пространстве ВП с использованием лифтинга на основе детектора Канни [3].



**Рис. 1 – Импульсная (а) и амплитудно-частотная (б) характеристика исходного фильтра  $g_s$  (1) и улучшенного фильтра  $g_s^{new}$  (2)**

Этот метод рекомендуется в задачах обработки изображений в случае, если помеховая ситуация не очень жесткая и необходимы методы контурной сегментации с низкой погрешностью определения координат точек перепадов интенсивности изображения.

Однако при повышении требований к помехоустойчивости контурной сегментации изображений использование системы улучшенных вейвлетов [1] нецелесообразно, т. к. расширение полосы пропускания фильтра (см. рис. 1, б) приводит к меньшему подавлению шума и более высокой детализации контурного препарата. Переход в пространство обобщенных функций ослабляет зависимость результата ВП от геометрических размеров объекта распознавания.

Заметим, что требования к помехоустойчивости сегментации и погрешности определения координат точек контуров объекта определяются как уровнем шума на изображении, так и геометрическими размерами

объекта. Абсолютная погрешность определения координат точек контуров объекта чаще всего фиксирована для заданного метода сегментации и уровня шумов. Поэтому, если объект имеет большие геометрические размеры, то относительная погрешность определения координат точек границ объекта мала. В этом случае на результат распознавания объекта больше влияет разрыв контура или ложные контуры, т. е. результат распознавания объекта определяется помехоустойчивостью сегментации. Если геометрические размеры объекта распознавания малы, то относительная погрешность определения координат точек контуров объекта велика. Тогда результат распознавания объектов на изображении в основном характеризуется погрешностью определения координат точек контуров. Поэтому возникает необходимость в разработке в составе метода сегментации ВП, у которого при изменении параметра преобразования изменяется и характер обработки.

Заметим, что улучшенные вейвлеты для задачи контурной сегментации изображений по своим свойствам сходны с дифференциатором [1]. Этим и определяется низкая помехоустойчивость методов сегментации, использующих эти вейвлеты. Высокой помехоустойчивостью обладают корреляционно-экстремальные методы контурной сегментации изображений [4], в основе которых лежит согласованная фильтрация. Поэтому для реализации разного характера обработки изображений построим систему улучшенных вейвлетов, одни из которых проводят пространственное дифференцирование, другие – согласованную фильтрацию.

Конструирование системы вейвлетов с требуемыми характеристиками можно осуществлять на основе лифтинга. Последний представляет собой модификацию передаточных функций фильтров, соответствующих вейвлетам, за счет аддитивной составляющей [1]. Однако при реализации лифтинга возникают затруднения при выборе вида аддитивной составляющей передаточной функции фильтра, обеспечивающей улучшение свойств соответствующего вейвлета. Применение вместо лифтинга преобразований графиков степенных функций [5] упрощает процесс построения улучшенных вейвлетов.

Целью работы является повышение помехоустойчивости контурной сегментации изображений и снижение погрешности определения координат точек контуров объектов на разных уровнях иерархии за счет применения вейвлетов, построенных путем преобразований

графика степенной функции.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

— разработан метод построения улучшенных вейвлетов для задачи контурной сегментации изображений путем преобразования графика степенной функции;

— с помощью вейвлетов, построенных путем преобразования графика степенной функции, система фильтров в составе подчеркивающего преобразования на основе лифтинга дополнена до согласованного фильтра;

— на основе детектора Канни предложен метод контурной сегментации изображений с применением вейвлетов, построенных путем преобразования графика степенной функции.

## 1. ЛИФТИНГОВАЯ СХЕМА ДЛЯ ЗАДАЧИ КОНТУРНОЙ СЕГМЕНТАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

При решении задачи контурной сегментации изображений ВП используется в качестве преобразования, подчеркивающего перепады интенсивности изображения. Последнее обеспечивает помехоустойчивость сегментации и снижает погрешность определения координат точек контуров. Очевидно, что требования помехоустойчивости и низкой погрешности определения координат точек перепадов интенсивности изображения противоречивы, поэтому результат подчеркивающего преобразования представляется иерархией изображений с подчеркнутыми контурами объектов разного размера.

Для получения результата иерархического подчеркивающего преобразования используется свертка с каждой из функций  $\{f_{i_{\min}}(x), \dots, f_i(x), \dots, f_{i_{\max}}(x)\}$ , которые определены для всех вещественных  $x$  и  $f_{i_{\min}}(x) \rightarrow 2\theta(x) - 1$  при  $i_{\min} \rightarrow -\infty$ , а  $f_{i_{\max}}(x) \rightarrow \delta'(x)$  при  $i_{\max} \rightarrow \infty$  [6]. Если в качестве подчеркивающего преобразования изображения используется ВП, под системой функций  $\{f_{i_{\min}}(x), \dots, f_i(x), \dots, f_{i_{\max}}(x)\}$  подразумевается множество вейвлет-функций. Чтобы удовлетворить предельному соотношению  $f_{i_{\max}}(x) \rightarrow \delta'(x)$  при  $i_{\max} \rightarrow \infty$  для подчеркивающего преобразования и этим уменьшить погрешность определения координат точек перепадов интенсивности при увеличении масштаба ВП в [1] к вейвлет-функции применялся лифтинг.

В результате обобщенная вейвлет-функция на

основе улучшенного фильтра  $g_s^{new}$  (см. рис. 1) определялась формулой

$$\psi_s^{new}(x) = \psi(sx) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} l_s(k) \delta(x-k), \quad (1)$$

где  $\psi(x) = 1/x$ ,  $l_s(k)$  – вещественные коэффициенты,  $\delta(x)$  – дельта-функция. ВП с вейвлет-функциями (1) является нестационарным, т. к. на разных масштабах преобразования используются разные анализирующие вейвлеты.

Оценим поведение обобщенных вейвлет-функций (1), полученных на основе лифтинга, в контексте свойств иерархического подчеркивающего преобразования. По построению обобщенной вейвлет-функции на основе лифтинга параметр масштаба  $s > 1$ .

В процессе реализации подчеркивающего преобразования нас интересует поведение функций  $\psi(sx)$  при  $s \rightarrow \infty$  и фиксированном  $x$ . Эти функции монотонно убывают при  $s \rightarrow \infty$  и фиксированном  $x$ , а также  $\psi(sx) = \frac{1}{sx} \rightarrow +0$

$\left( \psi(sx) = \frac{1}{sx} \rightarrow -0 \right)$ , если  $x > 0$  ( $x < 0$ ). При

$x \rightarrow 0$  в случае реализации подчеркивающего преобразования нас интересует поведение  $\psi(sx) = \frac{1}{sx}$  при  $s \rightarrow \infty$ . Это неопределенное

выражение типа  $0 \cdot \infty$ . Заметим, что  $x \rightarrow 0$  быстрее, чем  $s \rightarrow \infty$  при выполнении подчеркивающего преобразования. Последнее объясняется тем, что изображение сначала обрабатывается на одном уровне ( $s$  фиксировано, изменяется  $x$ ), а затем происходит смена уровня обработки (изменяется  $s$ ). Тогда  $\psi(sx) \rightarrow +\infty$  ( $\psi(sx) \rightarrow -\infty$ ) при  $x \rightarrow +0$  ( $x \rightarrow -0$ ). Следовательно,  $\psi(sx) \rightarrow \delta'(x)$  при  $s \rightarrow \infty$ . В случае  $s \rightarrow 1$   $\psi(sx) = \frac{1}{sx} \rightarrow \frac{1}{x}$ .

Сходимость  $\psi(sx)$  к  $\delta'(x)$  при  $s \rightarrow \infty$  и к  $\frac{1}{x}$  при  $s \rightarrow 1$  поточечная и имеет место также для улучшенных вейвлетов  $\psi_s^{new}(x)$  задачи контурной сегментации. Последнее справедливо для любого  $x \in R$ ,  $x = \pm 1$ , т. к. по построению улучшенных вейвлетов в этих точках их значения стремятся к бесконечности.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ ВЕЙВЛЕТОВ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРАФИКА СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

Дополнение системы улучшенных вейвлетов  $\psi_s^{new}(x)$  для задачи контурной сегментации изображений вейвлетами, реализующими согласованную фильтрацию, выполним на основе геометрического преобразования графика функции [7].

Под графиком функции понимается множество точек плоскости с прямоугольными координатами  $(x, y)$ , где  $y = f(x)$  – действительная функция одной действительной переменной  $x$ , которая принимает значения из области определения этой функции. С помощью линейных преобразований параллельного переноса, растяжения или сжатия, симметрии в некоторых случаях график функции можно построить по заданной его части или по графику другой функции. Так, графики функций  $y = f(x+a)$  и  $y = f(x)+b$  можно построить с помощью параллельного переноса вдоль оси  $Ox$  и  $Oy$  соответственно. С помощью растяжения или сжатия по оси  $Ox$  или  $Oy$  можно построить график функции  $y = f(kx)$  и  $y = mf(x)$ . Чтобы построить график функции  $y = mf(kx+a)+b$  последовательно выполняют перечисленные преобразования. Путем преобразования симметрии относительно биссектрисы первого координатного угла получают график обратной функции  $y = g(x) = f^{-1}(x)$ . График функции  $y = -f(x)$  может быть получен из графика функции  $y = f(x)$  отражением относительно оси  $Ox$ , а график функции  $y = f(-x)$  – из графика функции  $y = f(x)$  отражением относительно оси  $Oy$ . График функции  $y = |f(x)|$  получается отражением относительно оси  $Ox$  частей графика  $y = f(x)$  при  $y < 0$ .

С учетом приведенного анализа процесс построения улучшенных вейвлетов можно представить при помощи преобразований графиков степенных функций [5] следующим образом. График гиперболы  $y = 1/x$  (рис. 2, а) преобразуется с помощью с помощью параллельного переноса вдоль оси  $Ox$  на  $b_0 > 0$ :  $y_1 = 1/(x+b_0)$  (рис. 2, б). От графика  $y_1 = 1/(x+b_0)$  оставляем фрагмент при  $x > 1$ , а от графика  $y = x$  фрагмент при  $x \in [0, 1]$  (рис. 2, в). Оба графика соединяются в точке разрыва

и подвергаются отражению относительно оси  $Oy$ , а затем относительно оси  $Ox$  (рис. 2, г). График функции  $y_1 = 1/(x+b_0)$  может дополнительно подвергаться растяжению или сжатию относительно оси  $Ox$  перед выделением фрагмента при  $x > 1$ . В результате преобразований графиков степенных функций получен график локально интегрируемой функции.

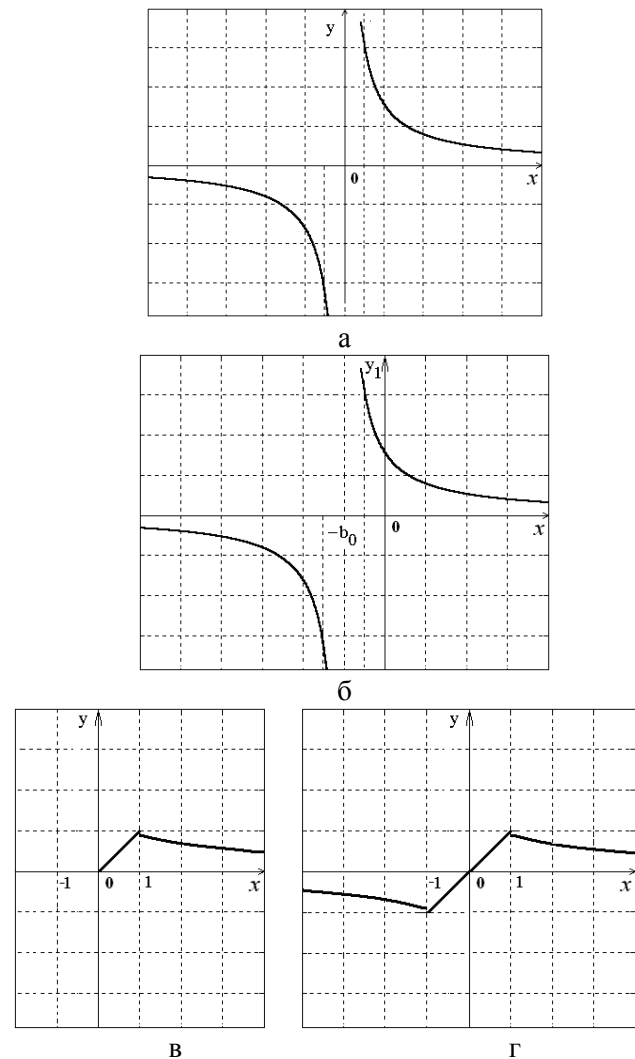


Рис. 2 – График гиперболы  $y = 1/x$  (а),  $y_1 = 1/(x+b_0)$  (б), построение вейвлет-функции (в, г)

На основе приведенной последовательности преобразований графиков степенных функций можно сформулировать метод построения улучшенных вейвлетов для задачи контурной сегментации изображений. Он заключается в следующем.

1. Выполняется сдвиг влево графика степенной функции на положительную величину, нелинейно зависящую от масштаба. Такое преобразование графика степенной

функции позволяет сконструировать улучшенные вейвлеты, способные выделять контуры объектов разных геометрических размеров с разной погрешностью определения координат точек контуров.

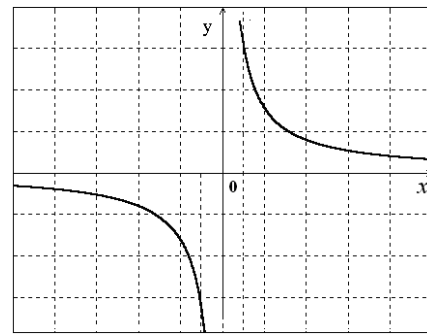
2. Функции, полученные на предыдущем этапе метода, подвергаются растяжению или сжатию с коэффициентом, равным значению масштаба преобразования. Это обеспечивает возможность обработки объектов разных геометрических размеров с разной помехоустойчивостью.

3. Фрагменты графиков полученных функций при  $x < 0$  удаляются. Оставшиеся фрагменты графиков подвергаются преобразованию симметрии относительно оси  $Oy$ . Результат преобразования симметрии относительно оси  $Oy$  при  $x < 0$  повторно подвергается преобразованию симметрии, но уже относительно оси  $Ox$ . Такие преобразования предполагают равноценность элементов строки (столбца) изображения относительно вертикальной (горизонтальной) оси.

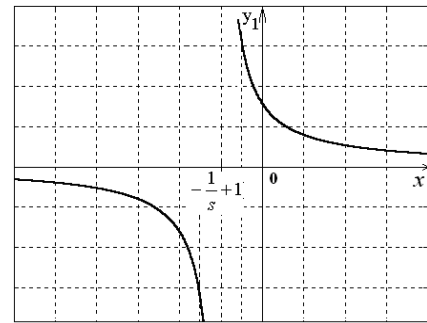
В качестве примера применения метода построения вейвлетов с помощью преобразований графиков степенных функций покажем, что система вейвлет-функций [7]

$$\psi_s(x) = \begin{cases} \frac{1}{s(x + \frac{1}{s} - 1)}, & \varepsilon \leq x \leq \gamma s, \\ \frac{1}{s(x - \frac{1}{s} + 1)}, & \gamma s \leq x \leq -\varepsilon, \\ 0, & |x| > \gamma s, \quad |x| < \varepsilon. \end{cases} \quad (2)$$

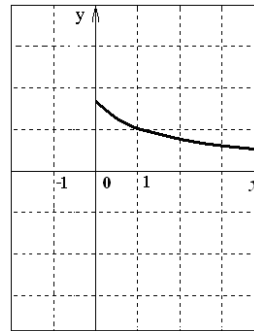
Рассмотрим случай  $\psi(x) = \frac{1}{x}$ . Пусть значения параметра масштаба  $s < 1$ . График гиперболы  $y = 1/x$  (рис. 3, а) подвергается преобразованию сдвига на  $(1/s - 1) > 0$ :  $y_1 = 1/(x + 1/s - 1)$  (рис. 3, б). От графика  $y_1 = 1/(x + 1/s - 1)$  оставляем фрагмент при  $x > 0$ , к которому применяем преобразование подобия с коэффициентом  $1/s$  (рис. 3, в). Отображаем антисимметрично полученный график на отрицательную полуось  $Ox$  (рис. 3, г).



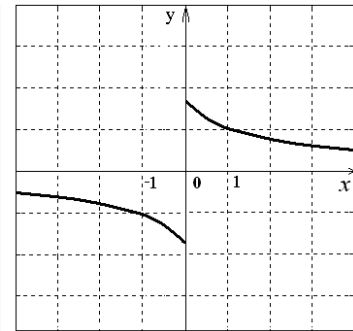
а



б



в



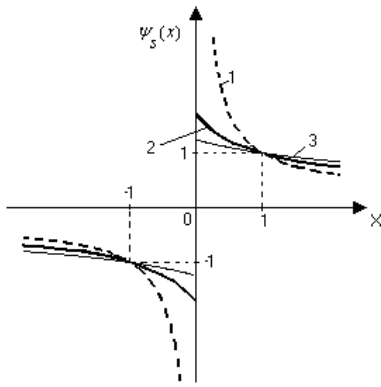
г

Рис. 3 – График гиперболы  $y = 1/x$  (а),  $y_1 = 1/(x + 1/s - 1)$  (б), построение вейвлета (в, г)

Полученные, в результате геометрических преобразований вейвлет-функции описываются формулой:

$$\psi_s(x) = \begin{cases} \frac{1}{s(x + \frac{1}{s} - 1)}, & x > 0, \\ \frac{1}{s(x - \frac{1}{s} + 1)}, & x < 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Графики этих функций для разных значений  $s$  изображены на рис. 4.



**Рис. 4 – Графики вейвлет-функций, определяемых формулой (3) при  $s = 1$  (1); 0,5 (2); 0,25 (3)**

Система вейвлет-функций (3) отличается от (2) значениями в окрестности нуля и на бесконечности. Последнее может быть скорректировано заменой фрагментов графиков функций системы (3) в окрестности нуля и на бесконечности соответствующими фрагментами графика функции  $y = 0$ . Т. о. система вейвлет-функций (2) получена путем преобразований графиков степенных функций. Однако система вейвлет-функций (3) в отличие от (2) удовлетворяет требованиям помехоустойчивости и низкой погрешности определения координат точек перепадов интенсивности для иерархического подчеркивающего преобразования, т. е.  $\psi_s(x) \rightarrow 2\theta(x) - 1$  при  $s \rightarrow 0$  и  $\psi_s(x) \rightarrow 1/x$  при  $s \rightarrow \infty$ .

Для того, чтобы это доказать, исследуем поведение функций  $\psi_s(x)$  при  $s \rightarrow 0$  и  $s \rightarrow 1$ . Если  $x > 0$ , то

$$\lim_{s \rightarrow 0} \psi_s(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s \left( x + \frac{1}{s} - 1 \right)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s(x-1)+1} = 1.$$

В случае  $x < 0$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \psi_s(x) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s \left( x - \frac{1}{s} + 1 \right)} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s(x+1)-1} = -1. \end{aligned}$$

Если  $x = 0$ , то  $\lim_{s \rightarrow 0} \psi_s(x) = 0$ . Тогда  $\psi_s(x) \rightarrow \text{sgn}(x)$  при  $s \rightarrow 0$ . При  $s \rightarrow 1$

$$\lim_{s \rightarrow 1} \psi_s(x) = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{s(x-1)+1} = \frac{1}{x}, \text{ если } x > 0, \text{ и}$$

$$\text{также } \lim_{s \rightarrow 1} \psi_s(x) = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{s(x+1)-1} = \frac{1}{x}, \text{ если}$$

$x < 0$ .

Покажем, что функция  $\text{sgn}(x)$  представляет собой импульсную характеристику фильтра, согласованного с перепадом интенсивности изображения. Импульсная характеристика согласованного фильтра представляет собой масштабную копию входного сигнала, которая располагается в зеркальном порядке вдоль оси пространственной координаты [8]. Кроме этого импульсная характеристика согласованного фильтра смещена относительно зеркальной копии входного сигнала на величину  $x_0$ :

$$h_{\text{согл}}(x) = ks_{\text{вх}}(x_0 - x), \quad (4)$$

где  $h_{\text{согл}}(x)$  – импульсная характеристика согласованного фильтра,  $s_{\text{вх}}(x)$  – входной сигнал,  $x_0, k$  – постоянные.

В качестве входного сигнала, соответствующего перепаду интенсивности изображения, выберем

$$s_{\text{вх}}(x) = a_0 + a_1\theta(-x), \quad (5)$$

где  $\theta(x)$  – функция Хевисайда,

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad \text{Функция}$$

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad \text{Тогда}$$

$$\text{sgn}(x) = 2\theta(x) - 1 \quad (6)$$

всюду на  $R$ , кроме точки  $x = 0$ . Учитывая (4), (5), (6), получаем

$$h_{\text{согл}}(x) = \text{sgn}(x)$$

всюду на  $R$ , кроме точки  $x = 0$ . При этом  $k = 2$ ,  $x_0 = 0$  в (4), а также  $a_0 = -1$ ,  $a_1 = 1$  в (5).

Таким образом, функция  $\text{sgn}(x)$  представляет собой импульсную характеристику фильтра, согласованного с перепадом интенсивности изображения на  $R \setminus 0$ . На значение интеграла свертки не влияет значение функции в одной точке  $x = 0$ . Следовательно, система вейвлет-функций (3) при  $s \rightarrow 0$  сходится к импульсной

характеристике согласованного фильтра для перепада интенсивности изображения.

В результате равномерной дискретизации при  $x > 0$  и  $x < 0$  вейвлет-функции (3) получаем фильтр  $g_s^{new}$  с коэффициентами

$$g_s^{new} = \left\{ -\frac{1}{s \cdot k + 1}, \dots, -\frac{1}{s \cdot 2 + 1}, -\frac{1}{s + 1}, -1, \right. \\ \left. 1, \frac{1}{s + 1}, \frac{1}{s \cdot 2 + 1}, \dots, \frac{1}{s \cdot k + 1} \right\}, \quad (7)$$

для которых предполагается, что  $s < 1$ . Этот фильтр является полосовым с подъемом в области верхних частот (рис. 5). Такое свойство фильтра позволяет регулировать соотношение между помехоустойчивостью и погрешностью определения координат точек перепадов интенсивности изображения в методах контурной сегментации [5].

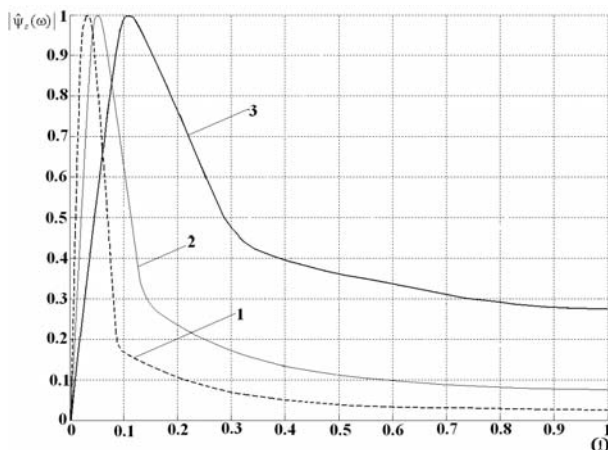


Рис. 5 – Амплитудно-частотная характеристика фильтра (7) при  $s = 0,01$  (1);  $0,1$  (2);  $0,5$  (3)

### 3. МЕТОД КОНТУРНОЙ СЕГМЕНТАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ВЕЙВЛЕТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ПУТЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРАФИКА СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

В работе [1] сформулирован метод контурной сегментации изображений в пространстве ВП с использованием лифтинга с параметрами: отношение верхнего порога к нижнему и верхний порог, т. е. процент точек в распределении величин вейвлет-коэффициентов, которые будут включены в контурный препарат. Этот метод заключается

- задаются значения масштаба ВП  $s$ ;

- для результата ВП с каждым значением масштаба  $s$ ;
- вычисляются верхний и нижний пороги с учетом выбранных параметров;
- для каждой строки исходного изображения выполняется быстрое многофазное ВП с использованием лифтинга; получается контрастированное изображение  $R_1(x, y)$  такого же размера, как и исходное;
- к контрастированным изображениям  $R_1(x, y)$  и  $R_2(x, y)$  применяется морфологическая обработка контура изображения метода Канни [3].

В данной работе метод контурной сегментации изображений в пространстве ВП с использованием лифтинга обобщен на случай применения вейвлетов, полученных путем преобразований графика степенной функции. В результате для каждой строки и каждого столбца изображения выполняется быстрое многофазное ВП с использованием лифтинга в случае, когда значение параметра масштаба  $s > 1$ . Если  $s < 1$ , то для каждой строки и каждого столбца изображения выполняется свертка с вейвлетами, полученными путем преобразований графика степенной функции. Остальные этапы метода работы [1] переносятся в более общий метод данной работы без изменений.

### 4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И ВЫВОДЫ

В ходе экспериментальных исследований оценивалась эффективная длительность подчеркнутого перепада интенсивности изображения, качество, помехоустойчивость и эффективность предложенного метода контурной сегментации изображений с применением вейвлетов, полученных путем преобразований графика степенной функции. Эффективная длительность подчеркнутого перепада интенсивности изображения – показатель, функционально связанный с погрешностью определения координат точек перепадов интенсивности. Он определялся по ослаблению модуля свертки фильтра с моделью перепада интенсивности  $\theta(x)$  до 0,5 от максимального значения (табл. 1).

Показателем качества контурной сегментации изображения выбран показатель близости между контурами тестового идеально



сегментированного изображения  $I^{эм}$  и изображения  $I^t$ , сегментированного исследуемым методом обработки [10]:

$$F = \frac{\sqrt{\sum_{x=1}^M \sum_{y=1}^N (I^t(x,y) - I^{эм}(x,y))^2}}{P}, \quad (8)$$

где  $P$  – длина выделенных контуров в пикселях,  $M \times N$  – размеры изображения.

**Таблица 1. Значения эффективной длительности подчеркнутого перепада интенсивности изображения для разных фильтров**

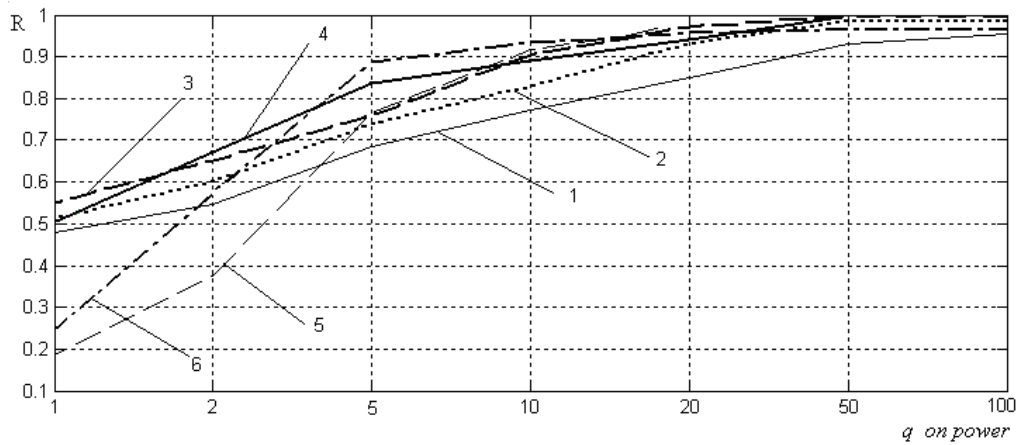
Фильтр	Эффективная длительность подчеркнутого перепада интенсивности изображения
$g_s^{new}, s=0,01$	83
$g_s^{new}, s=0,02$	67
$g_s^{new}, s=0,05$	45
$g_s^{new}, s=0,1$	33
$g_s, s=1$	7
$g_s, s=2$	3
$g_s, s=4$	1

Для оценки эффективности сегментации использовался показатель [10]

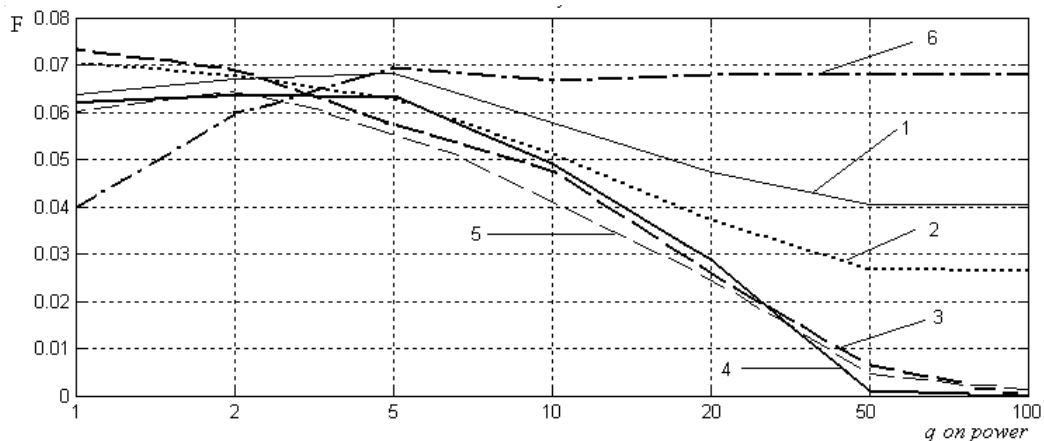
$$E = \frac{n \log_2 q}{k + 1}, \quad (9)$$

где  $n$  – количество пикселей в обрабатываемом полутоновом изображении,  $q$  – количество градаций интенсивности,  $k$  – количество значащих пикселей в контурном препарате.

Получены графики зависимости значения критерия Прэтта и показателей (8), (9) от отношения сигнал/шум  $q$  по мощности для тестового изображения размером 256x256 пикселей, представляющего собой черно-белый перепад с наложенным на него аддитивным независимым гауссовским шумом (рис. 6). Отношение сигнал/шум по мощности определялось как  $q = h^2 / \sigma_{вх}^2$ , где  $h$  – высота перепада интенсивности;  $\sigma_{вх}^2$  – дисперсия шума.

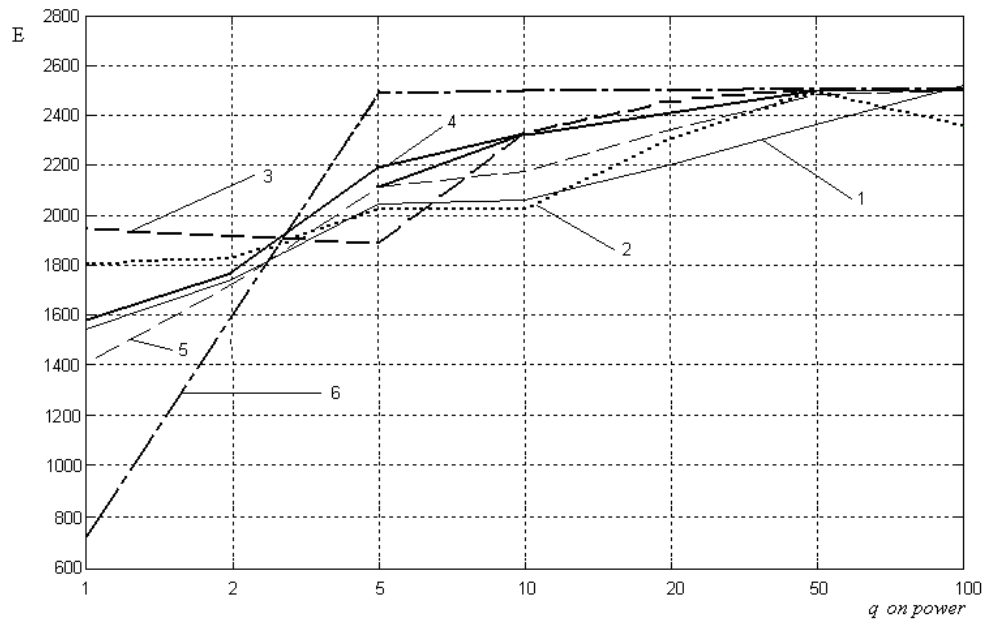


а



б





В

Рис. 6 – Зависимости критерия Прэтта (а), показателей качества (б) и эффективности сегментации (в) от отношения сигнал/шум  $q$  по мощности при  $s=0,01$  (1);  $0,02$  (2);  $0,05$  (3);  $0,1$  (4);  $0,5$  (5) для предложенного метода и метода Канни (6)

Результаты исследований предложенного метода контурной сегментации изображений с применением вейвлетов, полученных путем преобразований графика степенной функции, показали, что при росте параметра преобразования  $s$  снижается до 1,6 раз эффективная длительность подчеркнутого перепада интенсивности изображения, функционально связанная с погрешностью определения координат точек перепадов интенсивности. При этом показатель помехоустойчивости при значениях отношения сигнал/шум 2 и менее по мощности снижается до 3 раз, а по сравнению с методом Канни до 2,2 раз. Показатель качества с ростом  $s$  ухудшается до 8 раз при значениях отношения сигнал/шум более 5 по мощности, а по сравнению с методом Канни до 14 раз. По эффективности сегментации с ростом параметра  $s$  получены сходные результаты.

Таким образом, разработанный метод контурной сегментации изображений с применением вейвлетов, полученных путем преобразований графика степенной функции, можно рекомендовать в задачах обработки изображений с повышенными требованиями к помехоустойчивости, в случае, если необходимы методы контурной сегментации с регулируемой детализацией объектов изображения.

Приведенные результаты исследований позволяют разработчику систем компьютерного распознавания зрительных образов в

зависимости от свойств изображений и целей обработки выбрать адекватный вид вейвлет-преобразования и значение его параметра.

## 5. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. Krylov, M. Polyakova, Contour segmentation of images in space of wavelet transform with the use of lifting, *Optoelectronic Information-Power Technologies*, 12 (2006), pp. 48-58. (in Russian)
- [2] S. Mallat, *Wavelets in Signal Processing*, Moscow, Mir publishers, 2005, 671 p. (in Russian)
- [3] J. Canny, A computational approach to edge detection, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8 (1986), p. 679-698.
- [4] V. Krylov, M. Maksimov, *The Second Transformers of Images Signals*, Odessa, Astroprint, 1997, 176 p. (in Russian)
- [5] M. Polyakova, V. Krylov, Classification of methods of signal semantic wavelet transform for image contour segmentation, *International Journal of Computing*, (7) 1 (2008), pp. 51-57.
- [6] M. Polyakova, V. Krylov, Hierarchical signal-semantic transform in the distribution space for the image segmentation, *Odes'kyi Politechnichnyi Universytet. Pratsi*, 26 (2006), pp. 161-167. (in Russian)
- [7] *Mathematical Encyclopedic Dictionary* / Yu. Prokhorov; S. Adyan, N. Bahvalov, V. Bituyckov, A. Ermov, L. Kudryavcev, A.

- Onischuk, A. Yushkevich (eds). Moscow, Soviet encyclopedia, 1988, 847 p. (in Russian)
- [8] O. Babilunga, *Iterative methods of hierarchical contour segmentation of images in the space of hyperbolic wavelet transform*, Avtoref. dis... kand. techn. sciences: 05.13.23. Odessa, Odessa National Polytechnical University, 2008. 20 p. (in Ukrainian)
- [9] S. Baskakov, *Radiotechnical Chains and Signals*, Moscow, Vysshaya shkola, 1988, 488 p. (in Russian)
- [10] V. Abakumov, V. Krylov, S. Antoschuk, Increase of efficiency of processing of pattern information in automatic systems, *Electronics and Communications. Thematic issue of «Problems of electronics»*, 1 (2005), pp. 100-105. (in Russian)
- [11] W. Pratt, *Digital Image Processing*, Moscow, Mir publishers, 1982, 790 p. (in Russian)

*Научные интересы:* вейвлет-анализ, фракталы, теория обобщенных функций, функциональный анализ.



**Крылов Виктор Николаевич** – специалист (1978), радиотехника, Одесский политехнический институт, к.т.н. (1986), радиотехнические и телевизионные системы и устройства, д.т.н. (2003), автоматизированные системы управления и прогрессивные информационные технологии, профессор кафедры «Прикладная математика и информационные технологии в бизнесе» (2005), Одесский национальный политехнический университет.

*Научные интересы:* цифровая обработка изображений, распознавание образов.

*Научные интересы:* цифровая обработка изображений, распознавание образов.



**Полякова Марина Вячеславовна** – специалист (1994), прикладная математика, Одесский государственный университет, к.т.н. (2004), автоматизированные системы управления и прогрессивные информационные технологии,

доцент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии в бизнесе» (2006), Одесский национальный политехнический университет.



**Волкова Наталья Павловна** – специалист (1992), механика, Одесский государственный университет, старший преподаватель кафедры «Прикладная математика и информационные технологии в

Бизнесе» (2004), Одесский национальный политехнический университет.

*Научные интересы:* цифровая обработка изображений, распознавание образов.



## THE METHOD OF WAVELETS CONSTRUCTION BY TRANSFORMATION OF A GRAPH OF POWER FUNCTION FOR EDGE DETECTION

Marina Polyakova, Victor Krylov, Natalya Volkova

Odessa National Polytechnic University, 1, Shevchenko prospect, Odessa, 65044, Ukraine,  
 marina\_polyakova@rambler.ru

**Abstract:** *In this paper the method to construct the improved wavelets by transformation of a graph of power function is developed for the edge detection.*

**Keywords:** *Underlining of edges, Edge detection, Improved wavelets.*

In considerable part of computer recognition of visual patterns the objects of recognition have a hierarchical structure (object-subobject). For such problems or for the scene analysis it is necessary to distinguish objects on an image not only on the strength of edge but also on geometrical size of objects. In this case it is expedient to make edge detection of images in space of wavelet transform (WT) coefficients.

In this paper the noise stability of edge detection of images is increased and the error of determination of co-ordinates of position of objects edges on the different levels of hierarchy is lowered due to application of wavelets built by transforms of graph of power function. The method of construction of improved wavelets by transform of graph of power function is developed for the edge detection. The function graph is understood as a points set of a plane with rectangular co-ordinates  $(x, y)$ , where  $y = f(x)$  is a real-valued function of one real variable  $x$  which accepts values from a range of definition of this function [1] means of linear transforms of parallel shifting, scaling, and symmetry in some cases the function graph can be constructed with its parts or under a drawing of other function.

On the basis of the parallel shifting, scaling, and symmetry of graphs of power functions it is possible to formulate the method of construction of improved wavelets for the edge detection. It consists in the following.

1. To the graph of power function the left-shift on the positive value nonlinearly depending on a scale is applied. Such transform of the graph of power function allows constructing improved wavelets

underlines the edges of objects of different geometrical size with a different error of determination of co-ordinates of position of edges.

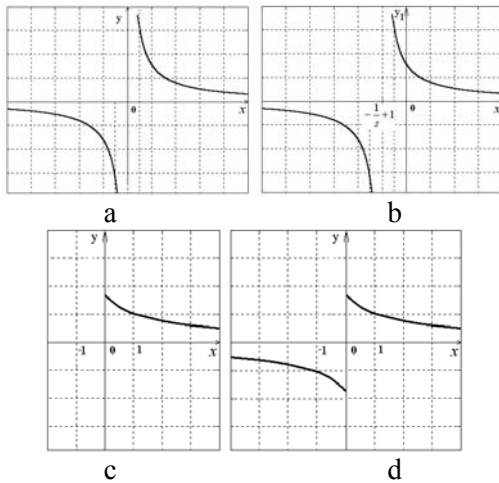
2. The functions got at the previous stage of a method are scaled with the factor equal to value of a scale of transform. It ensures a possibility of processing of objects of different geometrical size with different noise stability.

3. Fragments of graphs of the got functions at  $x < 0$  leave. The remained fragments of graphs are transformed by symmetry to axis  $Oy$ . The outcome of symmetry to axis  $Oy$  at  $x < 0$  repeatedly is exposed to symmetry transform, but already concerning an axis  $Ox$ . Such transforms assume an equivalence of pixels of a line (column) of the image concerning a vertical (horizontal) axis.

The method of construction of wavelets by transforms of graph of power functions [1] applied on the wavelets

$$\psi_s(x) = \begin{cases} \frac{1}{s(x+1/s-1)}, & x > 0, \\ \frac{1}{s(x-1/s+1)}, & x < 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Let's consider the case  $\psi(x) = 1/x$ . Let values of parameter of scale  $s < 1$ . The graph of hyperbola  $y = 1/x$  (Fig. 1, a) we shift on  $(1/s - 1) > 0$ :  $y_1 = 1/(x + 1/s - 1)$  (Fig. 1, b). From graph  $y_1 = 1/(x + 1/s - 1)$  we leave a fragment at  $x > 0$  to which we apply a scaling with factor  $1/s$  (Fig. 1, c). We map antisymmetrically the resulted graph on negative semiaxis  $Ox$  (Fig. 1, d).



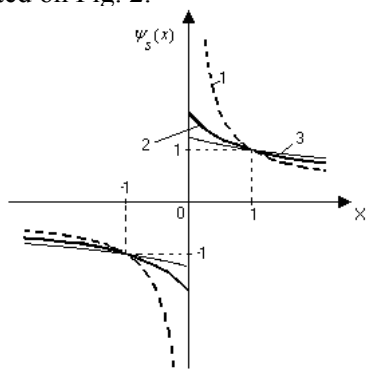
**Fig. 1 – the graph of hyperbola  $y = 1/x$  (a),  $y_1 = 1/(x + 1/s - 1)$  (b), construction of wavelet (c, d)**

The edge detector on images based on the Canny detector with the use of wavelets built by transform of the graph of power function is proposed.

Wavelets got as a result of geometrical transforms are described a formula:

$$\psi_s(x) = \begin{cases} \frac{1}{s(x + \frac{1}{s} - 1)}, & x > 0, \\ \frac{1}{s(x - \frac{1}{s} + 1)}, & x < 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Graphs of these functions for different values  $s$  are represented on Fig. 2.



**Fig. 2 – Graphs of the wavelets defined by the Eq. 3 at  $s = 1$  (1);  $0,5$  (2);  $0,25$  (3)**

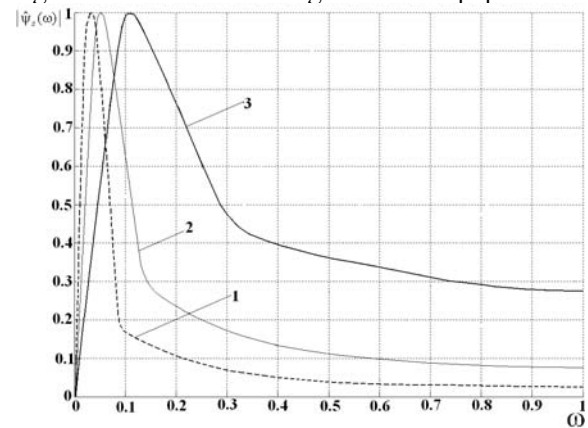
The wavelets from Eq. 2 differs from Eq. 1 by values in a neighbourhood of zero and on infinity. The last can be corrected by replacement of fragments of graphs of functions of Eq. 1 in a neighbourhood of zero and on infinity by corresponding fragments of the graph of function  $y = 0$ . Therefore the wavelets from Eq. 1 is got by transforms of graphs of power functions. However the wavelets from Eq. 2 unlike Eq. 1 satisfies to

requirements of a noise stability and a low error of determination of co-ordinates of position of edges for hierarchical underlining transform, i.e.  $\psi_s(x) \rightarrow 2\theta(x) - 1$  at  $s \rightarrow 0$  and  $\psi_s(x) \rightarrow 1/x$  at  $s \rightarrow \infty$ .

As a result of uniform discretization at  $x > 0$  and  $x < 0$  of wavelets from Eq. 2 we get filter  $g_s^{new}$  with coefficients

$$g_s^{new} = \left\{ -\frac{1}{s \cdot k + 1}, \dots, -\frac{1}{s \cdot 2 + 1}, -\frac{1}{s + 1}, -1, 1, \frac{1}{s + 1}, \frac{1}{s \cdot 2 + 1}, \dots, \frac{1}{s \cdot k + 1} \right\}, \quad (3)$$

for which it is supposed, that  $s < 1$ . This is band filter with lifting of the upper frequencies (Fig. 3). Such property of the filter allows to regulating a relation between noise stability and an error of definition of co-ordinates of position of edges of the image in the methods of edge detection [2].



**Fig. 3 – Frequency response of filter (3) at (1); (2); (3)**

Thus elaborated edge detector for images with the use of wavelets got by transforms of graph of power function it is possible to recommend in processing of images with the high requirements to noise stability in the case if the edge detector with the different processing of objects details on image is needed.

## REFERENCES

- [1] *Mathematical Encyclopedic Dictionary*, edited by F. V. Prokhorov, Moscow, Soviet encyclopedia, 1988.
- [2] M. Polyakova, V. Krylov, Classification of methods of signal semantic wavelet transform for image contour segmentation, *International Journal of Computing*, (7) 1 (2008), pp. 51-57.
- [3] V. G. Abakumov, V. N. Krylov and S. G. Antoschuk, Increasing of efficiency of processing of pattern information in the automated systems, *Electronics and communication: «Problems of electronics»*, 1 (2005), pp. 100-105.
- [4] W. K. Pratt, *Digital Image Processing*, New York, John Wiley and Sons, 1991.