



СПІНОВА МОДЕЛЬ ПОВНОГО ОДНОРОЗРЯДНОГО СУМАТОРА НА ЕЛЕМЕНТАХ ПЕРЕСА

Віталій Дейбук ¹⁾, Іван Юрійчук ²⁾, Роман Юрійчук ¹⁾

¹⁾ Кафедра комп'ютерних систем та мереж, факультет комп'ютерних наук,

²⁾ Кафедра фізики напівпровідників і наноструктур, фізичний факультет,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
вул. Коцюбинського 2, 58012, Чернівці, Україна,
v.deibuk@chnu.edu.ua, ivmykyur@gmail.com

Резюме: Побудована чотириспінова модель одnorozрядного суматора для твердотільного ЯМР квантового комп'ютера та проаналізована коректність його роботи в залежності від параметрів системи. Встановлено, що для чистих та суперпозиційних станів, суматор на елементах Переса коректно спрацьовує за чотири π -імпульси. Отримано оптимальні значення параметрів обмінної взаємодії на основі аналізу функції чіткості та визначена максимальна відстань між кубітами для коректної роботи суматора.

Ключові слова: квантовий біт, квантовий комп'ютер, логічний елемент Переса, спін, модель Ізінга, функція чіткості, повний одnorozрядний суматор.

SPIN MODEL OF FULL SUMMATOR ON PERES GATES

Vitaliy G. Deibuk ¹⁾, Ivan M. Yuriychuk ²⁾, Roman I. Yuriychuk ¹⁾

¹⁾ Computer systems and networks department

²⁾ Physics of semiconductors and nanostructures department
Chernivtsi National University, 2 Kotsubins'kogo Str., 58012, Chernivtsi, Ukraine
e-mail: v.deibuk@chnu.edu.ua, ivmykyur@gmail.com

Abstract: Four-spin model of single-digit summator for solid state nuclear magnetic resonance (NMR) quantum computer is proposed. Correctness of summator's operation is analyzed in dependence of system parameters. It is found that the summator on Peres gates works correctly in time of four π -pulses on pure numerical and superposition states. Optimal values for exchange interactions and maximum distance between q-bits necessary for correct summator's operation are obtained from the analysis of fidelity function.

Keywords: quantum bit, quantum computer, Peres logical gate, spin, Ising model, fidelity function, full single-digit summator.

ВСТУП

Розвиток нових технологій з кожним днем веде до підвищення швидкодії, мініатюризації та складності комп'ютерної техніки. Це в свою чергу обумовлює збільшення кількості транзисторів в мікросхемах (чіпах), що викликає зростання споживаної потужності. При цьому мільйони вентилів, які виконують логічні операції в традиційних комп'ютерах, є незворотними. Тобто, кожного разу виконання

логічної операції приводить до втрати або стирання деякої частини вхідної інформації, яка розсіюється у вигляді теплової енергії. Як було показано Ландауером [1], для незворотної логіки кожен біт втраченої інформації генерує $kT \ln 2$ Дж теплової енергії, де k – стала Больцмана, T – абсолютна температура. При кімнатних температурах на гігагерцових частотах сучасних процесорів, що містять сотні тисяч транзисторів, розсіювана енергія наближається до кількох Вт, що неминуче веде до експоненційної

некоректності як у розрахунках, так і до зниження часового ресурсу мікросхем. Вирішення цих проблем лежить у площині використання нових революційних технологій, які спроможні кардинально зменшити як споживану потужність, так і розсіяння теплової енергії в комп'ютерних системах. Вдалою альтернативою в цьому питанні можна вважати використання зворотної логіки, яка останнім часом досить швидко розвивається [2, 3], оскільки знаходить застосування у різноманітних областях, таких як квантовий комп'ютинг, нанотехнології, біоінформатика, оптичний комп'ютинг тощо, де важливою умовою є екстремально низьке розсіяння тепла. Можливість використання зворотних логічних операцій, які не знищують вхідну інформацію, теоретично не веде до розсіяння енергії в системах, що їх реалізують. Така логіка дозволяє відтворити вхідні стани за вихідними. Зворотний комп'ютинг використовує як термодинамічну, так і логічну зворотність і використовує адиабатичні системи, що відновлюють свою енергію, випромінюючи дуже мало тепла. Зворотними є кола (вентилі), в яких вектор вхідних станів завжди можна відновити з вектора вихідних станів. Логічні функції, які відповідають зворотним вентилям, повинні бути бієктивними, тобто реалізувати взаємно-однозначне відображення між вхідним та вихідним векторами. Розробці цифрових зворотних пристроїв присвячена велика кількість досліджень [2,3], однак в основному вони стосуються схематехнічного аспекту. В даній роботі побудована спінова модель однорозрядного суматора на елементах Переса для твердотільного квантового комп'ютера на ядерному магнітному резонансі (ЯМР) та проаналізована коректність його роботи в залежності від параметрів системи.

2. ПОВНИЙ ОДНОРОЗРЯДНИЙ ЗВОРОТНИЙ СУМАТОР

Суматори є одними з основних блоків, які входять до складу більшості обчислювальних пристроїв. Описані вище необхідні зміни у логіці квантових обчислень вимагають відповідних змін у реалізації суматорів як на логічному, так і на фізичному рівні. В якості базисних логічних елементів можна вибрати зворотні функціонально повні елементи Тоффолі, Фредкіна, Переса та ін. [1,3].

Розглянемо тривходові зворотні елементи. Елемент Тоффолі (CCNOT – двічі контрольоване НЕ), зображений на рис. 1, виконує функцію:

$$P = A, Q = B, R = AB \oplus C.$$

Цей елемент є універсальним, тобто з його допомогою можна отримати довільну логічну функцію, однак він не зберігає парність ($A \oplus B \oplus C \neq P \oplus Q \oplus R$).

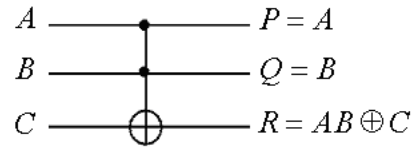


Рис. 1 – Елемент Тоффолі

У попередніх роботах [4,5] нами була проаналізована фізична модель квантового елемента Фредкіна (рис. 2), який є функціонально повним, зворотним логічним елементом, що зберігає парність, тобто вага за Хеммінгом вхідних сигналів зберігається на виході.

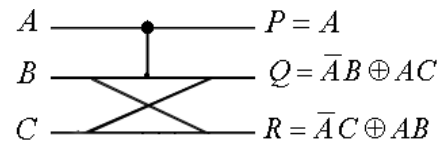


Рис. 2 – Елемент Фредкіна

Елемент Фредкіна (CSWAP – контрольований обмін) виконує функцію:

$$P = A, \\ Q = \text{if}(A)\text{then}(C)\text{else}(B), \\ R = \text{if}(A)\text{then}(B)\text{else}(C).$$

В даній роботі ми вибрали в якості базисного елемента Переса. Трикубітовий зворотний елемент Переса, як видно з рис. 3, поєднує функції елементів Фейнмана і Тоффолі:

$$P = A, Q = A \oplus B, R = AB \oplus C.$$

Хоча він не зберігає парність, однак має найменшу квантову вартість серед усіх трикубітових квантових елементів, є універсальним, а тому знайшов широке використання в комбінаційних зворотних схемах. Зокрема, квантова вартість елементів Тоффолі та Фредкіна становить 5, елемента Переса – 4 і т.д. [1,3].

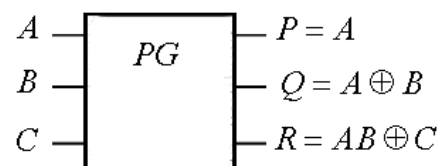


Рис. 3 – Елемент Переса

Дослідимо деякі схеми суматорів, побудовані на зворотних логічних елементах і оцінимо їх ефективність з точки зору використання для квантового комп'ютингу. Порівняно з класичними схемами у квантових є ряд обмежень. По-перше, у квантових схемах не допускаються «цикли», тобто зворотний зв'язок від однієї частини квантової схеми до іншої, схема має бути «ациклічною». По-друге, заборонена операція FANIN (можливість з'єднати проводи в один, який містить побітове OR входів), яка є незворотною, а, отже, неунітарною. По-третє, в квантових схемах недопустима й обернена операція FANOUT (розгалуження за виходом) через теорему про заборону клонування квантових станів [1]. Крім цього, має місце умова нормування на квантові стани, що відповідає їх імовірнісному характеру.

Абстрагуючись від апаратної частини, побудуємо функціональні схеми суматорів на зворотних логічних елементах, відповідно до вище наведених критеріїв. Проведемо оцінку схем за квантовою вартістю та наявністю зайвих (стокових) виходів, використавши елементи Переса та Фредкіна.

Повний однорозрядний суматор виконує дві функції: додавання:

$$S = A \oplus B \oplus C_{in}$$

та формування перенесення в наступний розряд

$$C_{out} = (A \oplus B)C_{in} \vee AB.$$

Такий суматор можна побудувати на двох елементах Переса (рис. 4). Квантова вартість такої схеми становить 8, апаратна складність – 2.

При побудові квантових мереж велика увага приділяється так званим постійним входам та зайвим виходам (Garbage Inputs/Outputs). Наявність таких входів-виходів суперечить ідеї мінімізації втрат енергії, адже на зайві виходи енергія поступає та розсіюється і необхідно приймати спеціальні заходи щодо її утилізації. Подана схема містить 1 постійний вхід на 2 зайві виходи.

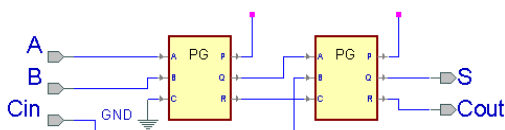


Рис. 4 – Повний однорозрядний суматор на елементах Переса

На базі елемента Фредкіна можна побудувати повний однорозрядний суматор [6] (рис. 5). Наведена схема не містить циклів та розгалужень по виходу, що відповідає описаним вище критеріям до квантових схем. Схема складається з п'яти елементів Фредкіна, має квантову вартість рівну 25, апаратну складність – 5, кількість постійних входів – 4, зайвих виходів – 4.

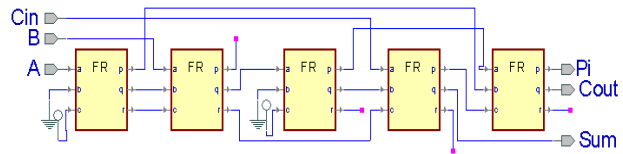


Рис. 5 – Логічна схема повного однорозрядного суматора на елементах Фредкіна [6]

На базі повного однорозрядного суматора можна побудувати довільний n -розрядний суматор. Враховуючи наведені вище критерії до квантових мереж, можна зробити висновок, що з точки зору як апаратної складності, так і квантової вартості та кількості зайвих виводів, схема повного однорозрядного суматора на елементах Переса є переважною. Саме тому проаналізуємо її фізичну модель.

3. АНАЛІЗ ФІЗИЧНОЇ МОДЕЛІ СУМАТОРА

Довільна дворівнева квантова система, в принципі, може бути використана для квантових обчислень. В таких обчисленнях для обробки інформації використовуються квантові біти (кубіти). Кубіт (КвБ) є суперпозицією двох основних квантових станів $|0\rangle$ і $|1\rangle$:

$$\Psi = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$$

при умові

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1.$$

Тензорний добуток N -кубітів задає регістр довжиною N : $|x\rangle = |i_{N-1}, \dots, i_0\rangle$, де $i_j = 0, 1$ і квантовий комп'ютер з N -кубітами працює в 2^N -вимірному гільбертовому просторі з елементами

$$\Psi = \sum c_x |x\rangle, \quad \sum |c_x|^2 = 1.$$

Довільна операція з регістрами задається унітарним перетворенням, що визначає відповідний квантовий логічний елемент. Хоча квантові комп'ютери з кількома кубітами вже технічно реалізовані і на них успішно перевірені

власне квантові алгоритми, серйозні комп'ютерні розрахунки вимагають квантових комп'ютерів принаймні зі 100-кубітовими регістрами, на що слід сподіватися у недалекому майбутньому.

Модель твердотільного комп'ютера є достатньо реалістичною і зручною для аналітичного та числового моделювання квантових логічних елементів та пристроїв на їх основі. Основу такого підходу складає квантово-механічна модель Ізінга [7] для ланцюжка взаємодіючих між собою чотирьох спінів $1/2$, котрі перебувають під дією сильного статичного магнітного поля (СМП) і керуючого слабкого поперечного радіочастотного магнітного поля (РЧМП) з круговою поляризацією. Гамільтоніан системи, тобто оператор повної енергії, має вигляд [7]:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}, \quad (1)$$

де

$$\hat{H}_0 = -\hbar \sum_{k=0}^3 \left\{ \omega_k I_k^z + 2J \left[I_0^z I_1^z + I_1^z I_2^z + I_2^z I_3^z + \alpha \left(I_0^z I_2^z + I_1^z I_3^z \right) + \alpha' I_0^z I_3^z \right] \right\} \quad (2)$$

$$\hat{W} = -\hbar \Omega \sum_{k=0}^3 \left[I_k^+ \exp(i\omega t) + I_k^- \exp(-i\omega t) \right]. \quad (3)$$

Оператор (1) при врахуванні (2) і (3) визначає поведінку системи взаємодіючих спінів у магнітному полі $B = (b \cos \omega t, -b \sin \omega t, B(z))$, де b та ω – амплітуда та частота РЧМП, відповідно, $B(z)$ – залежна від координати z індукція СМП. Окрім того у формулах (2) і (3) I_k^z – оператори проекції k -го спіну на вісь z , $I_k^\pm = I_k^x \pm iI_k^y$ – так звані оператори підвищення і пониження, $\omega_k = \gamma B(z_k)$ – Ларморові частоти прецесії спінів, $\Omega = \gamma b$ – частоти осциляцій Рабі, γ – гіромагнітний фактор протона, J – стала обмінної взаємодії між найближчими сусідами, $\alpha = J'/J$ – відносний внесок обмінної взаємодії других сусідів (J'), \hbar – стала Планка, поділена на 2π , α та α' – відносні внески взаємодії сусідів через одного і через два, відповідно [5]. Така модель має 16 станів, які можуть бути занумеровані десятковими числами $n = 1, 2, \dots, 16$, кожному з яких поставимо у відповідність його двійкове зображення $(i_3 i_2 i_1 i_0)$, де вміст кожного розряду дорівнює 0 або 1, що відповідає орієнтації спіну за або проти напрямку СМП. Через повноту системи базисних

станів $|k\rangle$ довільний стан системи можна записати у вигляді їх лінійної комбінації:

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^{16} C_k(t) |k\rangle. \quad (4)$$

Хвильові функції базисних станів $|k\rangle$ є власними функціями оператора H_0

$$H_0 |k\rangle = E_k |k\rangle, \quad (5)$$

тоді власні енергії базисних станів аналізованої системи визначаються формулою [5]:

$$E_n \equiv E_{i_3 i_2 i_1 i_0} = -0.5\hbar \left\{ \sum_{k=0}^3 (-1)^{i_k} \omega_k + J \left[(-1)^{i_0+i_1} + (-1)^{i_1+i_2} + (-1)^{i_2+i_3} + \alpha \left((-1)^{i_0+i_2} + (-1)^{i_1+i_3} \right) + \alpha' (-1)^{i_0+i_3} \right] \right\}. \quad (6)$$

Модель містить ряд параметрів, зокрема частоти осциляцій ω_k . Вибравши $B(z_k)$ так, щоб частоти осциляцій спінів дорівнювали $\omega_k = 2\omega_{k-1}$, енергетичний спектр системи представляє собою систему розщеплених ефектом Зеємана 16 еквідистантних рівнів, віддаль $\hbar\omega_0$ між якими визначається величиною статичного магнітного поля. Основним рівнем системи буде рівень (0000), а найвищим по енергії – рівень (1111). Числове моделювання проведено для наступних значень параметрів системи (в одиницях 2π МГц):

$$\omega_0 = 100, \quad \omega_1 = 200, \quad \omega_2 = 400, \quad \omega_3 = 800, \\ \alpha = \alpha' = 0,1, \quad J = 5, \quad \Omega = 0,1.$$

На рис. 6 представлена діаграма енергетичних рівнів системи. Стрілками на рисунку вказані дозволені переходи. Так з основного рівня (0000) можливими є переходи з переворотом одного зі спінів: (0000) \rightarrow (0001), 1 \rightarrow 2; (0000) \rightarrow (0001), 1 \rightarrow 3; (0000) \rightarrow (0010), 1 \rightarrow 5; (0100) \rightarrow (1000), 1 \rightarrow 9.

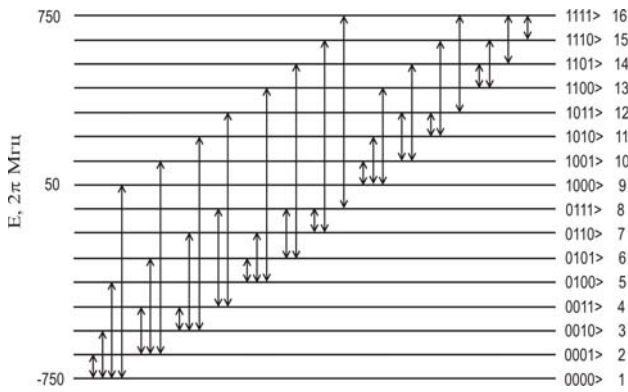


Рис. 6 – Діаграма енергетичних рівнів системи з чотирьох спінів

Динаміка системи описується нестационарним (залежним від часу t) рівнянням Шредінгера, яке має вигляд:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi. \quad (7)$$

Беручи до уваги розклад (4), останнє рівняння еквівалентне системі 16-ти рівнянь з шістнадцятьма комплексними невідомими C_m ($m = 1 \dots 16$):

$$i\hbar \dot{C}_m = E_m C_m + \sum_{n=1}^{16} W_{mn} C_n, \quad (8)$$

де $W_{mn}(t)$ – матричний елемент оператора збурення (3), обчислений на хвильових функціях базисних станів. Для аналізованої системи матриця $W(t)$ має структуру [5].

Для спрощення (8) перейдемо до системи відліку, пов'язаної зі спінами, які прецесують у СМП, тобто представимо коефіцієнти C_m у вигляді:

$$C_m = D_m \exp(-iE_m t \hbar^{-1}). \quad (9)$$

Тоді для системи рівнянь (8) можна записати

$$\dot{D}_m = \sum_{n=1}^{16} T_{mn}(t) D_n, \quad (10)$$

причому матричні елементи $T_{mn}(t)$ мають наступний вигляд:

$$T_{mn}(t) = -\frac{i}{\hbar} W_{mn}(t) \exp(i\omega_{mn} t), \quad (11)$$

де

$$\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar}. \quad (12)$$

Система рівнянь (10) є системою диференціальних рівнянь першого порядку з невідомими $D_n(t)$. Програму числового інтегрування системи розроблено і реалізовано в середовищі MatLab з використання процедури ode113.

Розглянемо спочатку роботу повного однорозрядного суматора, що складається з двох елементів Переса (рис. 7), на чистих цифрових станах. Вхідний вектор повного суматора складається з чотирьох бітів, причому третій має нульове значення. В таблиці 1 представлена таблиця істинності першого блоку однорозрядного суматора, що містить перший елемент Переса.

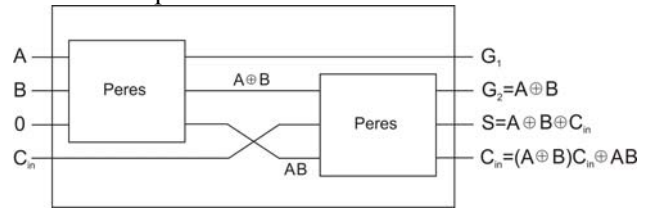


Рис. 7 – Повний суматор на елементах Переса

Таблиця 1. Таблиця істинності першого блоку однорозрядного суматора

A	B	C	C _{IN}	A'	B'	C'	C' _{IN}
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1

Прямі переходи 13(1100) → 11(1010) і 14(1101) → 12(1011) заборонені, оскільки під час них відбуваються перевороти відразу двох спінів. Однак дозволеними є двостадійні переходи через проміжний стан (рис. 8). Для переходу 13(1100) → 11(1010) можливі два варіанти: перехід через проміжний стан 9(1000):

13(1100) → 9(1000) → 11(1010), і перехід через проміжний стан 15(1110): 13(1100) → 15(1110) → 11(1010). Для переходу 14(1101) → 12(1011) можливі два варіанти: перехід через проміжний стан 10(1001): 14(1101) → 10(1001) → 12(1011), і перехід через проміжний стан 16(1110): 14(1101) → 16(1110) → 12(1011).

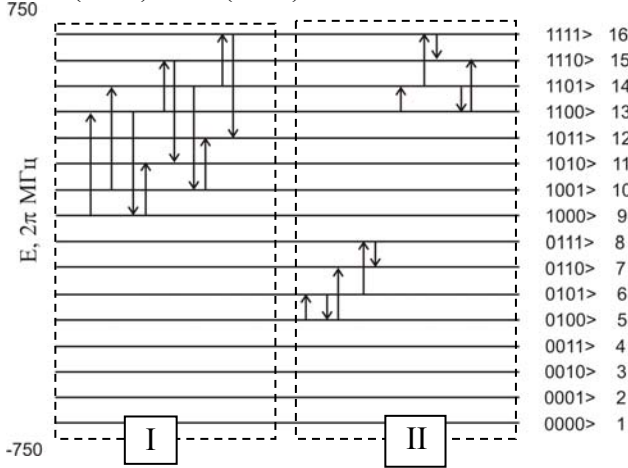


Рис. 8 – Дозволені переходи, необхідні для роботи першого (I) та другого (II) блоку суматора

Зауважимо, що для здійснення будь-якого дозволеного переходу з чистого стану з номером L у чистий стан з номером M необхідно налаштувати РЧМП у резонанс, тобто вибрати $\omega = |\omega_{LM}|$. У цьому випадку систему рівнянь (10) можна проінтегрувати аналітично. Тоді, наприклад, для переходу 13 → 9 отримуємо для амплітуд станів 13 і 9:

$$D_{13}(t) = \cos \frac{\Omega t}{2}, \quad (13)$$

$$D_9(t) = i \sin \frac{\Omega t}{2}. \quad (14)$$

Враховуючи, що ймовірності реалізації базисних станів $P_n(t)$ дорівнюють квадратам модулів елементів матриці $D_n(t)$, остаточно отримуємо такі залежності ймовірностей реалізації станів 13 і 9 від часу:

$$P_{13}(t) = \cos^2 \frac{\Omega t}{2}, \quad (15)$$

$$P_9(t) = \sin^2 \frac{\Omega t}{2}. \quad (16)$$

З формул (15) та (16) видно, що протягом так званого π -імпульсу, тривалість якого $t_0 = \pi/\Omega$,

ймовірність реалізації початкового чистого стану з номером 13 плавно спадає від 1 до 0, а ймовірність реалізації кінцевого чистого стану з номером 9 плавно зростає від 0 до 1. Імовірність решти станів весь час залишається нульовою. Це справедливо для будь-якої пари чистих станів, переходи між якими дозволені. Таким чином, на чистих станах за умови настроювання РЧМП на кожній стадії в резонанс, однорозрядний суматор на першому етапі чітко, тобто з ймовірністю 1, спрацьовує за два π -імпульси.

Вихідний вектор першого блоку однорозрядного суматора подається на другий блок (рис. 7). Отже, вхідним вектором блоку з другим елементом Переса є чотирибітовий вектор, значення першого біту якого не змінюється.

В таблиці 2 наведена таблиця істинності другого блоку однорозрядного суматора. У даному випадку забороненими є прямі переходи 6(0101) → 7(0110) і 14(1101) → 15(1110), тому для їх реалізації необхідні двостадійні переходи через проміжний стан. Для переходу 6(0101) → 7(0110) можливі два варіанти – перехід через проміжний стан 5(0100): 6(0101) → 5(0100) → 7(0110), і перехід через проміжний стан 8(0111): 6(0101) → 8(0111) → 7(0110). Для переходу 14(0101) → 15(0110) можливі два варіанти – перехід через проміжний стан 16(1111): 14(0101) → 16(1111) → 15(0110), і перехід через проміжний стан 13(1100): 14(0101) → 13(1100) → 15(0110). На рис. 8. стрілками зображені дозволені переходи, необхідні для роботи другого блоку однорозрядного суматора.

Таблиця 2. Таблиця істинності другого блоку однорозрядного суматора

A'	B'	C' _{IN}	C _{IN}	G ₁	G ₂	S	C _{OUT}
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1	1

В таблиці 3 наведені всі можливі переходи, необхідні для реалізації роботи однорозрядного суматора. Отже, в загальному випадку повний

однорозрядний суматор чітко спрацьовує на цифрових станах за чотири π -імпульси.

Таблиця 3. Переходи, що реалізують повний однорозрядний суматор

1-й блок	2-й блок
1 → 1	1 → 1
2 → 2	2 → 2
5 → 5	5 → 6
6 → 6	6 → 5 → 7 6 → 8 → 7
9 → 13	13 → 14
10 → 14	14 → 16 → 15 14 → 13 → 15
13 → 9 → 11 13 → 15 → 11	11 → 11
14 → 10 → 12 14 → 16 → 12	12 → 12

4. ДОСЛІДЖЕННЯ КОРЕКТНОСТІ РОБОТИ СУМАТОРА

Аналізу переходів між чистими цифровими станами недостатньо для встановлення оптимальних параметрів системи. Крім того, з точки зору застосування квантового паралелізму прямий інтерес представляє реалізація однорозрядного суматора на суперпозиційних станах. Для цього розглянемо два суперпозиційні стани. Перший з них є рівномірною суперпозицією базисних станів:

$$\Psi_1(0) = (\sqrt{16})^{-1} \sum_{k=1}^{16} |k\rangle. \quad (17)$$

Другий – це такий суперпозиційний стан, в якому цифрові стани 1 – 8 вільні, а решта – рівномірно заповнені з імовірністю 1/8:

$$\Psi_2(0) = (\sqrt{8})^{-1} \sum_{k=9}^{16} |k\rangle. \quad (18)$$

Подіємо на ці стани першим блоком однорозрядного суматора. Позначимо утворені при цьому очікувані матриці коефіцієнтів розкладу по базисних станах через $D^{(1e)}$ та $D^{(2e)}$. Реальні матриці, утворені дією на вказані вище початкові суперпозиційні стани того ж однорозрядного суматора при менших значеннях α в діапазоні $0 \leq \alpha \leq 0,1$ і незмінних інших параметрах системи, позначимо відповідно через

$D^{(1r)}$ та $D^{(2r)}$. Міру збігу реальних матриць з очікуваними визначимо через функцію чіткості F [7]:

$$F^{(1)} = |D^{(1e)+} D^{(1r)}|, \quad (19)$$

$$F^{(2)} = |D^{(2e)+} D^{(2r)}|, \quad (20)$$

де хрестик означає ермітове спряження. В обох випадках матриця-рядок множиться на матрицю-стовпець. Вважатимемо, що при кожному вибраному значенні α однорозрядний суматор працює коректно, якщо функції чіткості (19) і (20) дорівнюють 1.

Розглянемо двостадійні переходи, наприклад переходи $13(1100) \rightarrow 9(1000) \rightarrow 11(1010)$. Графіки функцій чіткості, побудовані на основі розв'язання системи (10) для обох суперпозиційних станів представлені на рис. 9(a). Результати розрахунків для рівномірної суперпозиції зображено суцільною лінією, а для нерівномірної суперпозиції – пунктирною. Як випливає з рис. 9(a), рівномірна суперпозиція є більш «жорсткою», оскільки для неї функція чіткості при $\alpha < 0,04$ має менші значення. Обидві функції чіткості осцилюють в залежності від α з періодом, який для вибраних параметрів задачі приблизно дорівнює 0,02. Найменше значення α , при якому значення функції чіткості дорівнюють 1, становить 0,04. Але вже при $\alpha = 0,03$ (у другому мінімумі) ці значення досить істотно відрізняються від 1 і дорівнюють відповідно 0,96 для нерівномірної і 0,94 для рівномірної суперпозиції. Висновки, зроблені при розгляді переходів $13(1100) \rightarrow 9(1000) \rightarrow 11(1010)$, залишаються справедливими і для інших переходів, які необхідні для роботи повного однорозрядного суматора (табл. 3). Аналогічні висновки отримуються з аналізу інших, в тому числі двостадійних переходів, необхідних для роботи однорозрядного суматора як для рівномірної, так і нерівномірної суперпозицій.

Взаємодія між ядерними спінами виникає внаслідок обмінної взаємодії електронів сусідніх кубітів, якщо вони розташовані достатньо близько один до одного і хвильові функції електронів яких перекриваються, тому величина обмінної взаємодії між спінами залежить від відстані між спінами.

Якщо спіни знаходяться на відстані r , то для обмінної енергії справедливо [8]:

$$4J(r) \cong 1,6 \frac{e^2}{\varepsilon a_B} \eta^{5/2} \exp(-2\eta), \quad (21)$$

де $\eta = r/a_B$, ε – діелектрична постійна середовища, a_B – борівський радіус.

Проаналізована залежність функції чіткості спрацювання однорозрядного суматора від відстані (η) між спінами (рис. 9(b)) для рівномірної (суцільна крива) і нерівномірної (пунктирна крива) суперпозицій при переходах $13(1100) \rightarrow 9(1000) \rightarrow 11(1010)$. Максимальне значення параметра η , для якого однорозрядний суматор спрацьовує коректно, дорівнює $\eta = 1,52$. Залежність функції чіткості від параметра η для інших переходів виявляє таку ж закономірність. Враховуючи, що для іонів фосфору в кремнії борівський радіус складає 3 нм, для максимальної віддалі між кубітами при якій суматор коректно працює отримуємо величину 4,56 нм.

відстань між кубітами ($r = 4,56$ нм), необхідна для коректної роботи суматора.

6. СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, NY, 2001, 676 p.
- [2] A. De Vos, *Reversible Computing: Fundamentals, Quantum Computing, and Applications*, Wiley-VCH, 2010, 252 p.
- [3] M. Saeedi, I. L. Markov, Synthesis and optimization of reversible circuits – a survey, *ACM Computing Surveys*, (44) 3 (2012), pp. A1-A34.
- [4] G. P. Gorskyi, V. G. Deibuk, Frequency noise influence on functioning of Fredkin quantum gate, *Int. J. Computing*, (9) 2 (2010), pp. 118-126. (in Ukrainian)
- [5] G. P. Gorskyi, V. G. Deibuk, Four spins model of universal quantum Fredkin gate, *Informational Technologies and Computer*

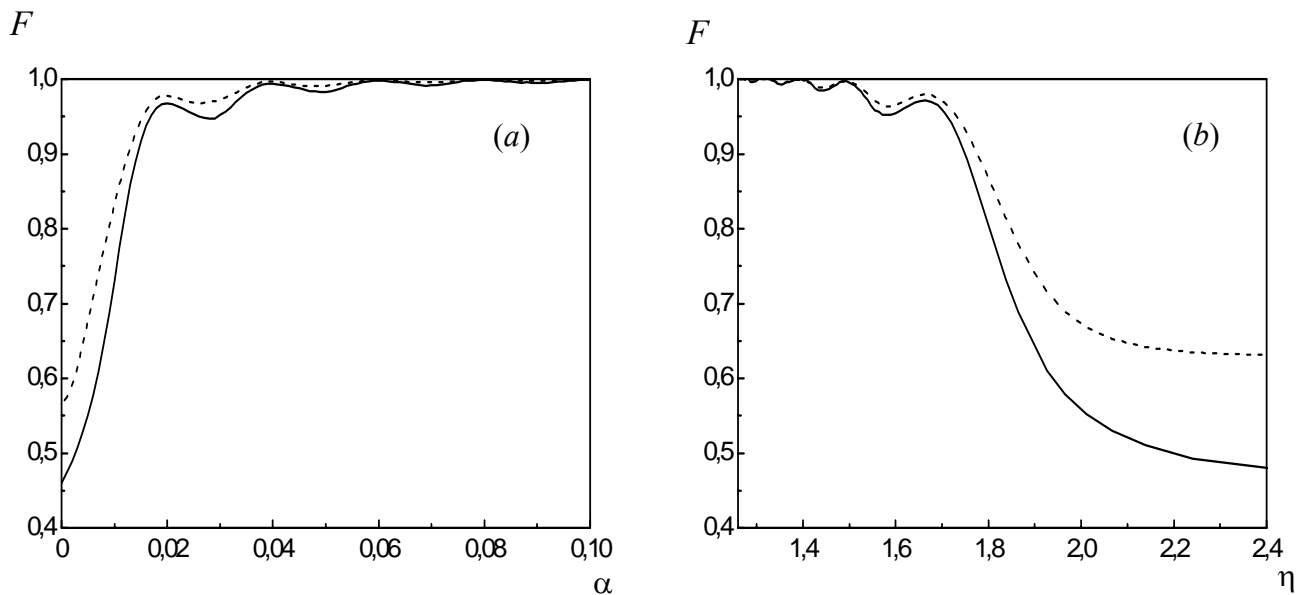


Рис. 9 – Залежність функцій чіткості спрацювання однорозрядного суматора для рівномірної (суцільна крива) і нерівномірної (пунктирна крива) суперпозицій від α (a) та η (b)

5. ВИСНОВКИ

Побудована чотириспінова модель однорозрядного суматора для твердотільного ЯМР квантового комп'ютера та проаналізована коректність його роботи в залежності від параметрів системи. Встановлено, що для чистих та суперпозиційних станів, суматор на елементах Переса коректно спрацьовує за чотири π -імпульси. Встановлено оптимальні значення параметрів обмінної взаємодії на основі аналізу функції чіткості та визначена максимальна

Engineering, (21) 2 (2011), pp. 56-63. (in Ukrainian)

- [6] J. W. Bruce, M. A. Thornton et al., Efficient adder circuits based on the conservative reversible logic gates, *Proc. IEEE Comp. Soc. Ann. Symp. on VLSI*, Pittsburgh, PA (April 25-26, 2002), pp. 83-88.
- [7] G. V. Lopez, L. Lara, Numerical simulation of controlled-controlled-not (CCN) quantum gate in a chain of three interacting spins system, *J. Phys. B: At. Opt. Mol. Phys.*, (39) 9 (2006), pp. 3897-3904.

- [8] B. Kane, A silicon-based nuclear spin quantum computer, *Nature*, (398) 5 (1998), pp. 133-137.



Віталій Дейбук, професор, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри «Комп'ютерні системи та мережі» Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Стаж науково-педагогічної діяльності у вищій школі 30 років. Автор понад 150 наукових та науково-

методичних праць, в тому числі 3 навчальних посібники з грифом Міністерства освіти та науки України.

Наукові інтереси – комп'ютерне моделювання фізичних властивостей конденсованих систем, проблеми квантової інформатики, дослідження властивостей матеріалів для квантових комп'ютерів.



Іван Юрійчук, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики напівпровідників і наноструктур Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Стаж науково-педагогічної діяльності у вищій школі 25 років.

Автор понад 70 наукових та науково-методичних праць. Наукові інтереси – дослідження енергетичного спектру низькорозмірних напівпровідникових квантових структур, вивчення енергетичної структури системи дефектів в напівпровідниках.



Роман Юрійчук, магістр кафедри «Комп'ютерні системи та мережі» Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Наукові інтереси – комп'ютерне моделювання елементів квантових комп'ютерів.



SPIN MODEL OF FULL SUMMATOR ON PERES GATES

Vitaliy G. Deibuk ¹⁾, Ivan M. Yuriychuk ²⁾, Roman I. Yuriychuk ¹⁾

¹⁾Computer systems and networks department

²⁾Physics of semiconductors and nanostructures department

Chernivtsi National University, 2 Kotsubins'kogo Str., 58012, Chernivtsi, Ukraine

e-mail: v.deibuk@chnu.edu.ua, ivmykyur@gmail.com

Abstract: Four-spin model of single-digit summator for solid state nuclear magnetic resonance (NMR) quantum computer is proposed. Correctness of summator's operation is analyzed in dependence of system parameters. It is found that the summator on Peres gates works correctly in time of four π -pulses on pure numerical and superposition states. Optimal values for exchange interactions and maximum distance between q -bits necessary for correct summator's operation are obtained from the analysis of fidelity function.

Keywords: quantum bit, quantum computer, Peres logical gate, spin, Ising model, fidelity function, full single-digit summator.

1. INTRODUCTION

Development of new technologies leads to higher performance, miniaturization and complexity of computer technology and causes an increase in the number of transistors in chips and therefore growth of power consumption. Millions of gates that perform logical operations in traditional computers are irreversible. That is, every time execution of logical operations leads to the loss of some of the input information, which dissipated as heat. Successful alternative in this question can be considered recently rapidly developing in various fields the use of reverse logic [1]. The ability to use reverse logic operations that do not destroy the incoming data, in theory does not lead to energy dissipation in the system. This logic allows to reproduce input states from output states.

The development of digital reverse devices is a subject of many papers [1], but they mainly relate to circuitry implementation. Adder is one of the main blocks of computing devices. Above mentioned changes in the logic of quantum computing require corresponding changes in the implementation of adders both in logical and physical level. In previous paper [2] we analyzed physical model of quantum Fredkin gate, which is functionally complete, reversible logic element. In this work a spin model for single-digit adder on Peres gates for solid state NMR quantum computer is proposed and correctness of its work depending on system parameters is analyzed.

2. RESULTS AND DISCUSSION

We consider quantum mechanics Ising model for interacting four spins which are subjected to a strong constant magnetic field (CMF) and a weak transverse radio frequency magnetic field (RFMF). Hamiltonian of the system may be written as [3]:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}, \quad (1)$$

where

$$\hat{H}_0 = -\hbar \sum_{k=0}^3 \left\{ \omega_k I_k^z + 2J [I_0^z I_1^z + I_1^z I_2^z + I_2^z I_3^z + \right. \\ \left. + \alpha (I_0^z I_2^z + I_1^z I_3^z) + \alpha' I_0^z I_3^z \right\}, \quad (2)$$

$$\hat{W} = -\hbar \Omega \sum_{k=0}^3 [I_k^+ \exp(i\omega t) + I_k^- \exp(-i\omega t)]. \quad (3)$$

Operator (1) sets forth the system of four interacting spins in magnetic field $B = (b \cos \omega t, -b \sin \omega t, B(z))$, where b and ω – amplitude and frequency of RFMF, $B(z)$ – z -coordinate dependent CMF induction, I_k^z – projection operator of k -th spin on z -axis, $I_k^\pm = I_k^x \pm iI_k^y$ – so-called «descend» and «ascend» operators, $\omega_k = \gamma B(z_k)$ – Larmore's precession frequencies, $\Omega = \gamma b$ – Rabi's frequency, γ – proton gyromagnetic ratio, J – exchange interaction

constant for nearest neighbors, α and α' – relative exchange interaction for second and third neighbors correspondingly [2], \hbar – Plank’s constant. The model has 16 states each of which correspond to binary representation $(i_3 i_2 i_1 i_0)$, where i is equal to 0 or 1. An arbitrary state of the system can be written as a linear combination of the basis states $|k\rangle$, which are eigenvectors of the operator \hat{H}_0 :

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^{16} C_k(t) |k\rangle. \quad (4)$$

Evolution of the system is described by time-dependent Schrödinger equation, which may be represented in the form:

$$\dot{D}_m = \sum_{n=1}^{16} T_{mn}(t) D_n. \quad (10)$$

where time-dependent matrix $T_{mn}(t)$ has the form:

$$T_{mn}(t) = -\frac{i}{\hbar} W_{mn}(t) \exp(i\omega_{mn}t). \quad (5)$$

Here $W_{mn}(t)$ – matrix of the perturbation operator \hat{W} on the basis states $|k\rangle$ and $\omega_{mn} = (E_m - E_n) / \hbar$.

System (10) is a system of first order differential equations with unknown amplitudes $D_n(t)$. Numerical integration of the system is realized in MatLab program environment. For numerical simulation following parameters of the system were chosen (in units 2π MHz): $\omega_0 = 100$, $\omega_1 = 200$, $\omega_2 = 400$, $\omega_3 = 800$, $\alpha = \alpha' = 0,1$, $J = 5$, $\Omega = 0,1$.

Full single-digit adder consists of two Peres gates. Input register of the adder is a four-bit vector, one bit of which is equal to 0. Output vector from the first Peres gate is directed to the second Peres gate.

We study the action of the adder both on pure numerical states and also on superposition states. Two types of superposition states are considered: a uniform superposition of basis states and a superposition state where basis states 1-8 are free and the rest has probability 1/8.

For pure numerical states during so-called π -pulse probability of initial numerical state continuously decrease from 1 to 0, and probability of final state continuously increases form 0 to 1. Probability of other states remains unchanged. It is true for every pair of pure numerical states Thus,

while frequency of RFMF tuned in resonance the adder on pure numerical works coorrectly (probability equal to unity) during four π -pulses.

For superposition states we analyzed dependence of fidelity function [3] on distance between qubits (spins). Interaction between nuclear spins is caused by electrons exchange interaction of neighbouring qubits and is a result of electrons wave functions overlapping. Therefore the magnitude of spin interaction depends on distance between nuclear spins. Exchange interaction of well separate spins can be written as [4]:

$$4J(r) \cong 1,6 \frac{e^2}{\epsilon a_B} \eta^{5/2} \exp(-2\eta), \quad (21)$$

where $\eta = r/a_B$, r – spin distance, ϵ – dielectric constant of the semiconductors, a_B – semiconductor Bohr radius.

From the analisys of fidelity function for single-digit adder action on uniform and non-uniform superposition states it is found maximal value of parameter $\eta=1,52$ necessary for correct action of the adder. Taking into account that Bohr radius for phosphorous ions in silicon is 3 nm maximal spin distance is 4,56 nm.

3. SUMMARY

Four-spin model of single-digit adder for solid state NMR quantum computer is proposed. Correctness of adder’s operation is analyzed in dependence of system parameters. It is found that on pure numerical states the adder on Preres gates works correctly in times of four π -pulses. From the analysis of fidelity function optimal values of exchange interactions and maximal distance between qubits ($r=4,56$ nm) necessary for correct adder’s operation are obtained.

4. REFERENCES

- [1] A. De Vos, *Reversible Computing: Fundamentals, Quantum Computing, and Applications*, Wiley-VCH, 2010, 252 p.
- [2] G. P. Gorskyi, V. G. Deibuk, Four spins model of universal quantum Fredkin gate, *Informational Technologies and Computer Engineering*, (21) 2 (2011), pp. 56-63. (in Ukrainian)
- [3] G. V. Lopez, L. Lara, Numerical simulation of controlled-controlled-not (CCN) quantum gate in a chain of three interacting spins system, *J. Phys. B: At. Opt. Mol. Phys.*, (39) 9 (2006), pp. 3897-3904.
- [4] B. Kane, A silicon-based nuclear spin quantum computer, *Nature*, (398) 5 (1998), pp. 133-137.