computing@computingonline.net
www.computingonline.net

ISSN 1727-6209
International Journal of Computing

ПРО ФАЗОВУ ВЗАЄМОЗАЛЕЖНІСТЬ І МОЖЛИВІСТЬ РЕДУКЦІЇ СИСТЕМИ ФУНКЦІЙ УОЛША

Любомир Петришин [1), 2)]

[1)] AGH University of Science and Technology, 30 Mickiewicza Av., Cracov, 30-059, Poland,
L.B.Petryshyn@gmail.com
[2)] Прикарпатський національний університет, вул. Шевченка 57, м. Івано-Франківськ, 76-025

Резюме: *Система функцій Уолша є мультиплікативною групою систем функцій Радемахера і Грея. В своєму складі вміщує дискретно-гармонічні sin-складові функцій Радемахера, cos-складові функцій Грея, а також дискретно-негармонічні складові функцій Уолша. Встановлено попарну фазову взаємозалежність повної системи функцій Уолша. Побудовано підсистеми непарних (sin-складових) та парних (cos-складових) функцій Уолша як базиси теоретико-числових перетворень. Визначено перспективу наступних досліджень ефективності перетворень цифрової обробки сигналів у запропонованих системах функцій.*

Ключові слова: *цифрова обробка, функції, Радемахера, Грея, Уолша, парні, непарні.*

ABOUT PHASE INTERDEPENDENCE AND POSSIBILITY OF WALSH FUNCTIONS SYSTEM REDUCTION

Lubomyr Petryshyn [1), 2)]

[1)] AGH University of Science and Technology, 30 Mickiewicza Av., Cracov, 30-067, Poland,
[2)] Precarpathian National University, str. Shevchenko 57, Ivano-Frankivsk, 76-025, L.B.Petryshyn@gmail.com

Abstract: *The system of Walsh functions is the multiplicative group of Rademacher- and Gray-function systems. The system contains discrete-harmonic sin-components of Rademacher functions, cos-components of Gray functions, and also discrete-nonharmonic components of Walsh functions. Pair phase interdependence of complete Walsh system functions is established. Subsystems of odd (sin-components) and even (cos-components) of Walsh functions as bases of theoretic-number transformations are constructed. The perspective of the future researches of transformations efficiency for digital signal processing in the proposed function systems is defined.*

Keywords: *Digital processing, function, Rademacher, Gray, Walsh, even, odd.*

ВСТУП

Цифрова обробка повідомлень є однією із найбільш важливих системних функцій, вимагає основних затрат обчислювальної потужності компютеризованих систем, тому ефективність її здійснення є вирішальним чинником техніко-економічної оцінки систем обробки даних [1-3]. Історично в якості базисних в основному застосовувались гармонічні та дискретно-гармонічні функції, які є похідними *sin-* та *cos-*гармонічних коливань, що було зумовлено простотою технічної реалізації якісних гармонічних генераторів базисних функцій цифрової обробки сигналів [4-9]. З розвитком цифрової техніки стала можливою проста реалізація і інших систем залежностей, зокрема дискретно-негармонічних функцій Уолша та Галуа [3, 10-13], які володіють розширеними функціональними можливостями в порівнянні з дискретно-гармонічними системами функцій [12-16]. Можливості технічної реалізації спричинили швидкий розвиток математичних основ теоретико-числових перетворень, ґрунтуючись на яких були реалізовані цифрові засоби формування, зв’язку, фільтрації, обробки, зберігання повідомлень, що володіють покращеними техніко-економічними характеристиками [2, 3, 10-16].

Характер джерела інформації визначає властивості формованого інформаційного потоку, який може бути проаналізований чи синтезований за допомогою тільки парних, тільки непарних, чи обидвох типів систем базисних функцій [2, 4, 13, 14]. З іншого боку, діапазон теоретико-числових перетворень може бути додатково штучно адаптований під характер тільки парних чи тільки непарних систем функцій [3, 14, 16]. Таким чином, при цифровій обробці вхідного потоку даних можливо застосовувати виключно системи парних (наприклад, функції Грея) чи непарних функцій (наприклад, система Радемахера) із необхідністю задання параметру фази складових функцій, або ж можна застосувати системи, що вміщують як парні так і непарні складові функції (наприклад, дискретно-фазову, Уолша, Галуа і т.п.) без можливої необхідності задання нульових фаз вхідних сигналів, внаслідок чого зменшується кількість операцій на обробку нульової фази вхідного сигналу. Проте виникає завдання визначення оптимального співвідношення обчислювальних затрат на обробку більшої чи меншої кількості складових базисних систем функцій та, відповідно, необхідність здійснення обчислень, зумовлених заданням початкової фази сигналів вхідного потоку даних.

Вперше встановлено, що повна система функцій Уолша вміщує попарно ідентичні парні та непарні функції із взаємним фазовим зсувом $\pm\pi/2$ періоду визначення кожного порядкового складу. Така властивість дозволяє застосовувати систему функцій для теоретико-числових перетворень та цифрової обробки сигналів в повному наборі парних та непарних складових, а також додатково в двох часткових варіантах – системі тільки парних чи тільки непарних функцій. З метою подальшого дослідження встановленої властивості проаналізуємо як будується система функцій Уолша і якими є їх фазові взаємозалежності.

1. ДИСКРЕТНО-ГАРМОНІЧНІ СИСТЕМИ ФУНКЦІЙ

При теоретико-числових перетвореннях, що грунтуються на функціональному аналізі та синтезі, враховують цілий ряд параметрів, із яких, згідно сформульованого завдання у вступі, проаналізуємо кількість функцій в базисному наборі Уолша та їх характер щодо парності чи непарності. Як показує практика, при цифровій обробці сигналів, можна заощадити на виконанні певних операцій, враховуючи характер сигналу, який підлягає аналізу чи синтезу. Зокрема, проаналізуємо специфіку побудови базисних систем для теоретико-числових перетворень функцій парного та непарного типів, що вимагає необхідності та достатності застосування відповідно базисних систем парних та непарних функцій без необхідності виконання операцій фазових зсувів.

Одним із класичних базисів функціонального аналізу є базис Радемахера [1-6], який становить ортонормовану систему дискретних функцій

$$Rad\ (n,\theta) = sign\ [sin\ 2^n\pi,\theta], \qquad (1)$$

де $i = 0, 1, 2, ..., n$ – порядковий номер функції, θ – параметр часу, тобто час, нормований до інтервалу T: $\theta = t / T$, де t – поточне значення часу, $n = log_2 N$ – порядок набору базисних функцій теоретико-числових перетворень, N – модуль цілочислених значень базису.

$$signx(t) = \begin{cases} 1 & при \quad x(t) > 0 \\ -1 & при \quad x(t) < 0, \\ 0 & при \quad x(t) = 0 \end{cases}$$

Для пояснення характеру системи Радемахера на рис. 1 зображено перші чотири функції 0 – 3-го порядків.

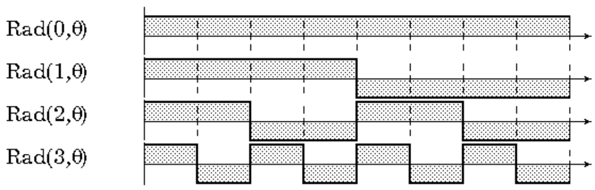

Рис. 1 – Система функцій Радемахера

Із формули (1) та рис. 1 слід звернути увагу, що функції Радемахера є так званими "чистими" *sin*-складовими, які змінюють своє значення у точці t=0. Іншими словами, базис Радемахера становлять непарні функції, що характеризуються залежністю

$$F\ (-t) = -F\ (t).$$

За допомогою такого складу без додаткових операцій фазового зсуву можна аналізувати чи синтезувати функції непарного типу.

З іншого боку, відомий базис Грея [12, 13, 16], який утворений залежністю

$$Gry\ (n,\theta) = sign\ [cos\ 2^n\pi,\theta],$$

перші чотири функції 0 – 3-го порядків якого зображено на рисунку 2.

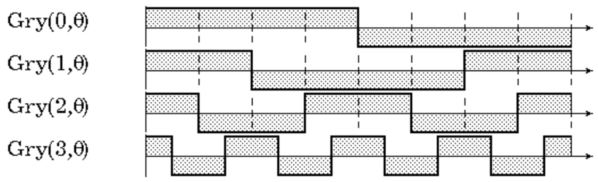

Рис. 2 – Система функцій Грея

На відміну від базису Радемахера, базис Грея є системою функцій так званих “чистих” *cos*-складових, що мають характер парних функцій, тобто

$$F(-t) = F(t).$$

Тому за допомогою функцій Грея без додаткових операцій фазового зсуву можна здійснювати аналіз функцій типу парних.

Проте, якщо на практиці підлягають функціональному розкладу як парні, так і непарні функції, необхідно здійснити вибір одного із наступних рішень.

Відомо, що непарні, чи *sin*-складові, а також парні, чи *cos*-складові, володіють взаємозалежністю фазового зсуву для кожного із порядків на значення ±π/2. Тому перше рішення полягає у виборі одного довільного із парних чи непарних базисів та здійсненні операції фазового зсуву.

Інше рішення полягає у виборі єдиного суміщеного базису із парних та непарних функцій без необхідності погодження їх нульової фази на значення ±π/2. Автором вперше запропонований базис дискретно-фазових функцій [15, 16], що синтезований із базисів парних фінкцій Грея та непарних функцій Радемахера наступним чином:

$$DF(n,\theta,i) = \begin{cases} Rad\,(n,\theta) = sign[sin\;2^n\,\pi,\theta] \\ Gry\,(n,\theta) = sign[cos\;2^n\,\pi,\theta] \end{cases}.$$

Тому для прикладу $n = 3$:

$$DF(0,\theta,0) = Rad\;(0,\theta) = sign\;[sin\;\pi,\theta],$$
$$DF(0,\theta,0) = Gry\;(0,\theta) = sign\;[cos\;\pi,\theta],$$
$$DF(1,\theta,0) = Rad\;(1,\theta) = sign\;[sin\;2\pi,\theta],$$
$$DF(1,\theta,2) = Gry\;(1,\theta) = sign\;[cos\;2\pi,\theta],$$
$$DF(2,\theta,0) = Rad\;(2,\theta) = sign\;[sin\;4\pi,\theta],$$
$$DF(2,\theta,1) = Gry\;(2,\theta) = sign\;[cos\;4\pi,\theta],$$
$$DF(3,\theta,0) = Rad\;(3,\theta) = sign\;[sin\;8\pi,\theta],$$
$$DF(3,\theta,i) = Gry\;(3,\theta) = sign\;[cos\;8\pi,\theta].$$

На рис. 3 зображено приклад перших функцій 0 – 3-го порядків дискретно-фазового базису.

Дослідження ефективності застосування вище окреслених двох рішень виходять за рамки даного матеріалу, що визначає перспективу подальших досліджень і буде опубліковано в майбутньому.

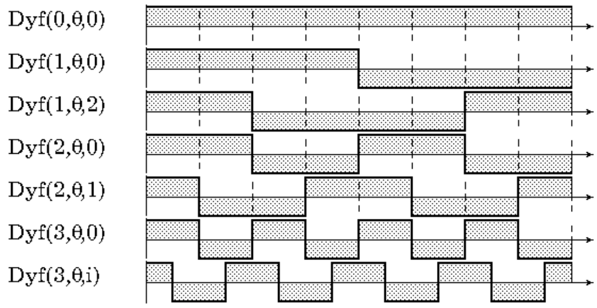

Рис. 3 – Система дискретно-фазових функцій

Матеріал попередніх розділів щодо класичних базисів Радемахера та Грея, а також щодо запропонованого базису дискретно-фазових функцій дозволяє перейти до функціональних властивостей та аналізу ефективності застосування базису Уолша.

2. СИНТЕЗ СИСТЕМИ ФУНКЦІЙ УОЛША

Базис Уолша був розроблений у 1923 році [7, 11, 12] та в наступному набув широкого застосування завдяки потужному функціональному складу [11-13, 16]. Розроблені та широко застосовують також системи функцій Уолша, впорядковані за Уолшем, Пелі, Адамаром, чи іншим чином, кожен із них вміщує інваріантний повний набір функцій [12, 13, 16], тобто є повною мультиплікативною групою складових систем функцій Радемахера та Грея [16]. Нижче наведено процедуру дискретного тригонометричного синтезу функцій базису Уолша $Wal(n,\theta,i)$, впорядкованого за Уолшем, за базисами Радемахера $Rad(n,\theta)$ та Грея $Gry(n,\theta)$.

$$Wal(0,\theta)=Rad(0,\theta)=sign[sin\pi]=$$
$$=Gry(-1,\theta)=sign[cos\pi/2],$$
$$Wal(1,\theta,1)=Rad(1,\theta)=sign[sin2\pi]=$$
$$=Gry(0,\theta)=sign[cos\pi],$$
$$Wal(1,\theta,2)=Rad(1,\theta)\;Rad(2,\theta)=$$
$$=sign[sin2\pi]\;sign[sin4\pi]=Gry(1,\theta)=sign[cos2\pi],$$
$$Wal(2,\theta,1)=Rad(2,\theta)=sign[sin4\pi]=$$
$$=Gry(0,\theta)\;Gry(1,\theta)=sign[cos\pi]\;sign[cos2\pi],$$
$$Wal(2,\theta,2)=Rad(2,\theta)\;Rad(3,\theta)=$$
$$=sign[sin4\pi]\;sign[sin8\pi]=Gry(2,\theta)=sign[cos4\pi],$$
$$Wal(3,\theta,1)=Rad(1,\theta)\;Rad(2,\theta)\;Rad(3,\theta)=$$
$$=sign[sin2\pi]\;sign[sin4\pi]\;sign[sin8\pi]=$$
$$=Gry(0,\theta)\;Gry(2,\theta)=sign[cos\pi]\;sign[cos4\pi],$$
$$Wal(3,\theta,2)=Rad(1,\theta)\;Rad(3,\theta)=$$
$$=sign[sin2\pi]\;sign[sin8\pi]=$$
$$=Gry(1,\theta)\;Gry(2,\theta)=sign[cos2\pi]\;sign[cos4\pi],$$
$$Wal(3,\theta,3)=Rad(3,\theta)=sign[sin8\pi]$$
$$=Gry(0,\theta)\;Gry(1,\theta)\;Gry(2,\theta)=$$
$$=sign[cos\pi]\;sign[cos2\pi]\;sign[cos4\pi],$$
$$Wal(3,\theta,4)=Rad(3,\theta)\;Rad(4,\theta)=$$

$=sign[sin8\pi]\ sign[sin16\pi]=Gry(3,\theta)=sign[cos8\pi],$
$Wal(4,\theta,1)=Rad(1,\theta)\ Rad(3,\theta)\ Rad(4,\theta)=$
$=sign[sin2\pi]\ sign[sin8\pi]\ sign[sin16\pi]=$
$= Gry(0,\theta)\ Gry(3,\theta)=sign[cos\pi]\ sign[cos8\pi],$
$Wal(4,\theta,2)=Rad(1,\theta)\ Rad(2,\theta)\ Rad(3,\theta)\ Rad(4,\theta)=$
$= sign[sin2\pi]\ sign[sin4\pi]\ sign[sin8\pi]\ sign[sin16\pi]=$
$=Gry(1,\theta)\ Gry(3,\theta)=sign[cos2\pi]\ sign[cos8\pi],$
$Wal(4,\theta,3)=Rad(2,\theta)\ Rad(3,\theta)\ Rad(4,\theta)=$
$=sign[sin4\pi]\ sign[sin8\pi]\ sign[sin16\pi]=$
$=Gry(0,\theta)\ Gry(1,\theta)\ Gry(3,\theta)=$
$=sign[cos\pi]\ sign[cos2\pi]\ sign[cos8\pi],$
$Wal(4,\theta,4)=Rad(2,\theta)\ Rad(4,\theta)=$
$=sign[sin4\pi]\ sign[sin16\pi]=$
$=Gry(2,\theta)\ Gry(3,\theta)=sign[cos4\pi]\ sign[cos8\pi],$
$Wal(4,\theta,5)=Rad(1,\theta)\ Rad(2,\theta)\ Rad(4,\theta)=$
$= sign[sin2\pi]\ sign[sin4\pi]\ sign[sin16\pi]=$
$= Gry(0,\theta)\ Gry(2,\theta)\ Gry(3,\theta)=$
$=sign[cos\pi]\ sign[cos4\pi]\ sign[cos8\pi].$
$Wal(4,\theta,6)=Rad(1,\theta)\ Rad(4,\theta)=$
$=sign[sin2\pi]\ sign[sin16\pi]=$
$=Gry(1,\theta)\ Gry(2,\theta)\ Gry(3,\theta)=$
$=sign[cos2\pi]\ sign[cos4\pi]\ sign[cos8\pi],$
$Wal(4,\theta,7)=Rad(4,\theta)=sign[sin16\pi]=$
$= Gry(0,\theta)\ Gry(1,\theta)\ Gry(2,\theta)\ Gry(3,\theta)=$
$=sign[cos\pi]\ sign[cos2\pi]\ sign[cos4\pi]\ sign[cos8\pi].$

Функції Уолша, впорядковані за Уолшем, або частості, що зображені на рис. 4, вміщують в своєму складі дискретно-гармонічні функції систем Радемахера та Грея, а також оригінальний набір мультиплікованих дискретно-нерегулярних функцій Уолша $Wal(n,\theta,i)$.

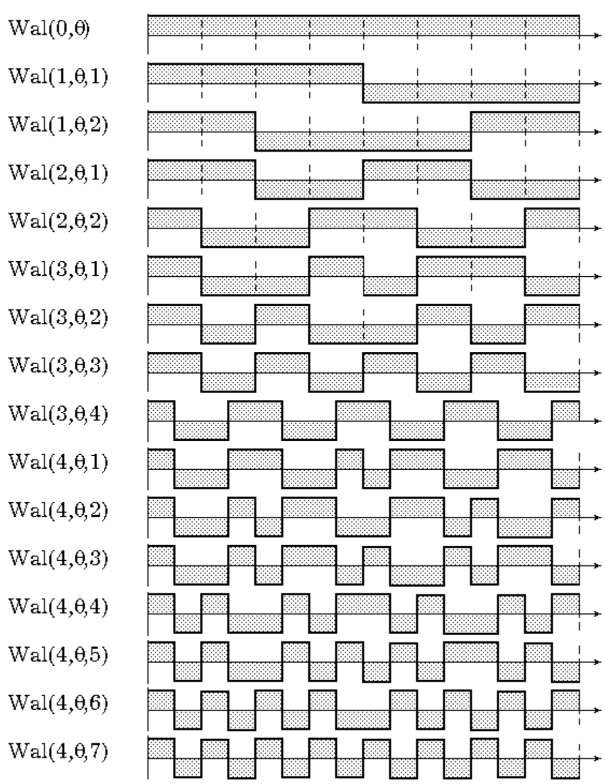

Рис. 4 – Система функцій Уолша

3. ВЛАСТИВІСТЬ ФАЗОВОЇ ВЗАЄМОЗАЛЕЖНОСТІ СИСТЕМИ УОЛША

Якщо функції Радемахера і Грея в складі базису Уолша утворюють повні системи дискретно-гармонічних функцій, то вибіркові дискретно-нерегулярні функції теж утворюють відповідно парні та непарні складові базису. Для прикладу системи функцій Уолша четвертого порядку (рис. 5) визначена наступна фазова взаємозалежність:

$Wal\ (0,\theta)\ = sign[sin\pi]=sign[cos\pi/2]$
$Wal(1,\theta,1) = Wal(1,\theta,2) + \pi/2,$
$Wal(1,\theta,2) = Wal(1,\theta,1) - \pi/2,$
$Wal(2,\theta,1) = Wal(2,\theta,2) + \pi/4,$
$Wal(2,\theta,2) = Wal(2,\theta,1) - \pi/4,$
$Wal(3,\theta,1) = Wal(3,\theta,2) - \pi/2,$
$Wal(3,\theta,2) = Wal(3,\theta,1) + \pi/2,$
$Wal(3,\theta,3) = Wal(3,\theta,4) + \pi/8,$
$Wal(3,\theta,4) = Wal(3,\theta,3) - \pi/8,$
$Wal(4,\theta,1) = Wal(4,\theta,2) + \pi/2,$
$Wal(4,\theta,2) = Wal(4,\theta,1) - \pi/2,$
$Wal(4,\theta,3) = Wal(4,\theta,4) - \pi/4,$
$Wal(4,\theta,4) = Wal(4,\theta,3) + \pi/4,$
$Wal(4,\theta,5) = Wal(4,\theta,6) - \pi/2,$
$Wal(4,\theta,6) = Wal(4,\theta,5) + \pi/2,$
$Wal(4,\theta,7) = Wal(5,\theta,1) + \pi/16,$
$Wal(5,\theta,1) = Wal(4,\theta,7) - \pi/16.$

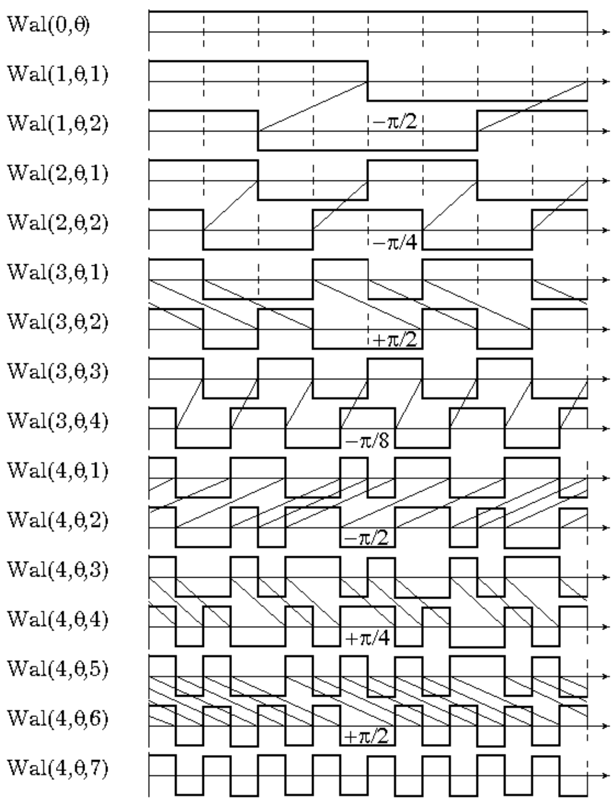

Рис. 5 – Фазова взаємозалежність функцій Уолша

4. ПАРНІ ТА НЕПАРНІ ПІДСИСТЕМИ СИСТЕМИ ФУНКЦІЙ УОЛША

Із наведеного складу функцій шляхом екстракції *sin*-складових можна побудувати підсистему функцій Уолша за непарними функціями

$Wal(0,\theta) = Rad(0,\theta)$,
$Wal(1,\theta,1) = Rad(1,\theta)$,
$Wal(2,\theta,1) = Rad(2,\theta)$,
$Wal(3,\theta,1) = Rad(1,\theta)\ Rad(2,\theta)\ Rad(3,\theta)$,
$Wal(3,\theta,3) = Rad(3,\theta)$,
$Wal(4,\theta,1) = Rad(1,\theta)\ Rad(3,\theta)\ Rad(4,\theta)$,
$Wal(4,\theta,3) = Rad(2,\theta)\ Rad(3,\theta)\ Rad(4,\theta)$,
$Wal(4,\theta,5) = Rad(1,\theta)\ Rad(2,\theta)\ Rad(4,\theta)$,
$Wal(4,\theta,7) = Rad(4,\theta)$,

Графічне зображення такої підсистеми функцій Уолша зображено на рис. 6.

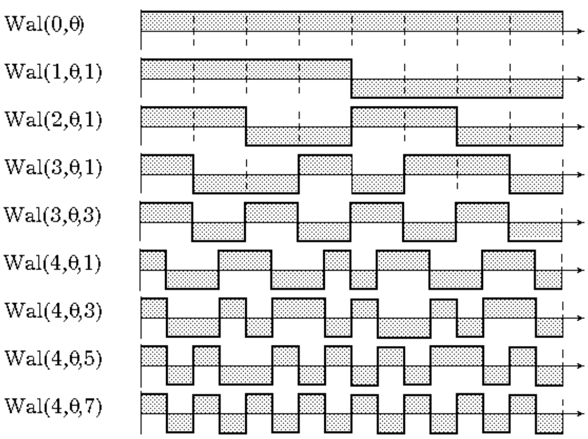

Рис. 6 – Система *sin*-складових функцій Уолша

Нижче здійснено екстракцію *cos*-складових системи функцій Уолша за парними функціями.

$Wal(0,\theta,1) = Gry(-1,\theta)$,
$Wal(1,\theta,1) = Gry(0,\theta)$,
$Wal(1,\theta,2) = Gry(1,\theta)$,
$Wal(2,\theta,2) = Gry(2,\theta)$,
$Wal(3,\theta,2) = Gry(1,\theta)\ Gry(2,\theta)$,
$Wal(3,\theta,4) = Gry(3,\theta)$,
$Wal(4,\theta,2) = Gry(1,\theta)\ Gry(3,\theta)$,
$Wal(4,\theta,4) = Gry(2,\theta)\ Gry(3,\theta)$,
$Wal(4,\theta,6) = Gry(1,\theta)\ Gry(2,\theta)\ Gry(3,\theta)$,
$Wal(5,\theta,1) = Gry(4,\theta)$,

Графічне зображення системи *cos*-складових функцій Уолша наведено на рис. 7.

У всякому довільному повному базисному наборі функцій Уолша для кожного із порядкових по n значень максимальний ступінь дискретизації за часом або мінімальний крок θ становить $\Delta\theta_n = \pi/2^{n-1}$ із всіма значеннями $n\Delta\theta_n = n\pi/2^{n-1}$, для порядків $n = n, n-1, ..., 1, 0$, а також із повним доповненням базису набором функцій молодших порядків i із відповідними дискретними заповненнями $\Delta\theta_i = \pi/2^{i-1}$, де для кожного
$n\ i = n-1, ..., 1, 0$.

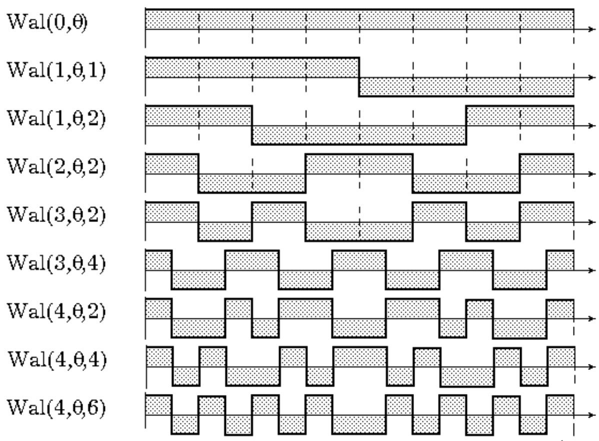

Рис. 7 – Система *cos*-складових функцій Уолша

Екстракцією власне *sin*- та *cos*-складових із повного набору функцій Уолша вилучаємо системи функцій Радемахера та Грея, на основі чого можна твердити, що базис Уолша вміщує повні дискретно-гармонічні базиси Радемахера та Грея, а також набір дискретно-нерегулярних функцій, які є повною мультиплікативною системою функцій Радемахера чи Грея.

Внаслідок вищенаведених викладок можна твердити, що базис Уолша є потужною системою функцій і дозволяє ефективно здійснювати аналіз досліджуваних залежностей. Проте, базис Уолша володіє значною функціональною базисною надлишковістю, зумовленою тим, що потужність базису становить $P = N^2$ [17]. На сьогоднішній день як більш ефективні відомі базисні впорядкування Галуа [12, 13, 16], перехід до яких і побудова систем функцій здійснюється з базису Уолша за допомогою теоретико-числових перетворень. Як перспективу досліджень слід визначити, що, аналогічно до впорядкування функцій Уолша згідно відомих правил Уолша, Пелі, Адамара [6, 7, 11, 12, 16], вперше вводиться алгоритм рекурсивного впорядкування функцій Уолша, які утворюють кілька нових базисних впорядкувань, на основі чого синтезуються системи функцій Галуа.

5. ВИСНОВКИ

Визначено, що система функцій Уолша є повною мультиплікативною групою систем функцій Радемахера та Грея. Встановлено властивість фазової взаємозалежності складових функцій по парах однакових порядків, що дозволило здійснити їх групування на підсистеми функцій парного (*sin*-складові) та непарного (*cos*-складові) типів. Визначено в складах кожного з типів дискретно-гармонічні та дискретно-негармонічні набори системи функцій. Кожна із підсистем функцій парного чи непарного типів може бути використана в якості системи базисних функцій в цифровій обробці сигналів. Стаття має постановочний характер, визначає властивість фазової взаємозалежності впорядкувань функцій Уолша, яка, в свою чергу, визначає напрямок подальшого дослідження ефективності та специфіки застосування запропонованих систем функцій парного чи непарного типів, та повного базису Уолша в цифровій обробці сигналів на основі теоретико-числових перетворень.

6. СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

[1] J.G. Proakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*, Pearson Education, 2007, 1156 p.

[2] S.W. Smith, *Digital Signal Processing: A Practical Guide for Engineers and Scientist*, Newnes, 2003, 650 p.

[3] R.E. Blahut, *Fast algorithms for digital signal processing*, Addison-Wesley Pub. Co., 1985, 441 p.

[4] M.G. Karpovskii, E.S. Moskalev, *Spectral Methods for Analysis and Synthesis of Discrete Tools,* Leningrad, Energiya, 1973, 144 p. (in Russian)

[5] H. Rademacher, Einige Satze von allgemeine Ortogonalfunktionen, *Math. Annalen,* N 87, 1922, pp. 122-138.

[6] R.E.A.C. Paley, A Remarkable Series of Ortogonal Funktions, *Proc. London Math. Soc.*, 1932, (2)34, pp. 241-279.

[7] J.L. Walsh, A closed set of ortogonal functions, *American Journal of Mathematics*, 1923, Vol. 45, pp. 5-24.

[8] A. Haar, Zur Theorie der ortogonalen Funktionsysteme, *Math. Ann*., Vol. 69, 1910, pp. 331-371, Vol. 71, 1912, pp. 38-53.

[9] B. Gold, C.M. Rader, *Digital processing of signals*, McGraw-Hill, 1969, 269 p.

[10] A.V. Oppenheim, *Discrete-Time Signal Processing*, Pearson Education, 2006, 864 p.

[11] B.I. Golubov, A.V. Efimov, V.A. Skvorcov, *Walsh series and transformations: Theory and applications*, Moscow, Nauka, 1987, 343 p. (in Russian).

[12] L.A. Zalmanzon, *Fourier, Walsh and Haar transformations and their application in management, communications and other areas*, Moscow, Nauka, 1989, 496 p. (in Russian).

[13] L.V. Varichenko, V.G. Labunec, M.A. Rakov, *Abstract algebraic systems and digital signal processing*, Kiev, Naukova Dumka, 1986, 248 p. (in Russian).

[14] L.R. Rabiner, B. Gold, *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice Hall, 1975, p. 762.

[15] L.B. Petryshyn, *Digital messages processing in Galois basis*, Ivano-Frankivsk State Technical University of Oil and Gas, Ivano-Frankivsk, 1996, 89 p. (in Ukrainian).

[16] L.B. Petryshyn, *Theoretical bases for form transformation and information digital processing in Galois basis,* Kyiv, IZiMN MON, 1997, 237 p. (in Ukrainian).

[17] V.M. Mutter, *Bases of noise stable information telecast*, Moscow, Energoatomizdat, 1990, 288 p. (in Russian).

***Любомир Петришин**, доктор технічних наук, професор кафедри прикладної інформатики технічного університету “AGH University of Science and Technology in Cracov”, завідувач кафедри інформатики Прикарпатського національного університету ім. В. Стефаника. Вищу освіту отримав в Івано-Франківському технічному університеті нафти і газу за спеціальністю автоматизація та електрифікація гірничих робіт. Наукові ступені отримано в галузі розробки компонентів обчислювальних систем та мереж. Напрямок наукових досліджень полягає у розробці теоретичних основ, методів і засобів перетворення форми інформації та цифрової обробки повідомлень.*

computing@computingonline.net
www.computingonline.net

ISSN 1727-6209
International Journal of Computing

ABOUT PHASE INTERDEPENDENCE AND REDUCTION OF WALSH FUNCTIONS SYSTEM

Lubomyr Petryshyn [1), 2)]

[1)] AGH University of Science and Technology, 30 Mickiewicza Av., Cracov, 30-067, Poland,
[2)] Precarpathian National University, str. Shevchenko 57, Ivano-Frankivsk, 76-025, L.B.Petryshyn@gmail.com

Abstract: *The system of Walsh functions is the multiplicative group of Rademacher- and Gray-function systems. The system contains discrete-harmonic sin-components of Rademacher functions, cos-components of Gray functions, and also discrete-nonharmonic components of Walsh functions. Pair phase interdependence of complete Walsh system functions is established. Subsystems of odd (sin-components) and even (cos-components) of Walsh functions as bases of theoretic-number transformations are constructed. The perspective of the future researches of transformations efficiency for digital signal processing in the proposed function systems is defined.*

Keywords: *Digital processing, function, Rademacher, Gray, Walsh, even, odd.*

Digital data processing is one of the basic IT systemic functions, which requires the allocation of the most computing power, so the effectiveness of its implementation is the key factor in the technical and economic evaluation of data processing systems. The development of digital technology also enabled an easy implementation of the system functions, including discrete-non-harmonic Walsh and Galois functions, which have an extended functionality, compared to discrete-harmonic function systems. The possibility of technical implementation led to a rapid development of mathematical, theoretical and numerical processing, on the basis of which systems were developed, including digital formation, transmission, filtering, processing, compression and storage of data with expanded or improved technical and economic parameters.

The nature of an information source determines the properties of the formed information stream, which can be then analyzed, using only even functions, only odd ones or both types. On the other hand, the range of the theoretical and numerical processing may be artificially matched with the nature of only even or odd function systems. Thus, when digital processing of input stream date takes place, only even function systems may be used (e.g. the Gray function system) or odd ones (e.g., the Rademacher function system), with the necessity to preset the phase parameter of component functions, or one can use a system containing both even and odd function components (e.g., a discrete-phase, Walsh, Galois ones, etc.) without having to preset any zero input signal phases, which leads a reduction in the number of operations in the processing of an input signal zero phase.

For the first time, studies showed that a Walsh function complete system contains the same pairs of odd and even functions, with mutual phase shift of $\pm\pi/2$, in the period of component pair definition for each function order. This feature allows the use of a function system to carry out theoretical and numerical processing, as well as digital signal processing in a full set of odd and even components, and additionally in two partial options – a system containing only even or odd functions. In order to determine the direction of further research, we will examine how Walsh functions are formed and what their mutual phase interactions are.

With theoretical and numerical processing that is based on functional analysis and synthesis, one should take into account a number of parameters, of which, according to the problem formulated in the introduction, we shall analyze the number of functions in a basic Walsh set, and their nature, concerning their evenness or odd parity. In the practice of digital signal processing, one can save on some operations due to the nature of the signal that is subject to analysis and synthesis. In particular, we shall examine the structural specificity of basis function systems that are even and odd, for theoretical and numerical processing, which requires the necessity and sufficiency to use respectively systems of even and odd functions, without having to perform phase shifts.

Walsh functions arranged according to Walsh, or according to frequency (Figure 4) include discrete harmonic Rademacher and Gray functions, and the original set of discrete-irregular, multiplied Walsh functions $Wal(n,\theta,i)$. For example, for a fourth-order Walsh function system (Figure 5) the following phase interdependency was defined:

$Wal\,(0,\theta) = sign[sin\pi]=sign[cos\pi/2]$
$Wal(1,\theta,1) = Wal(1,\theta,2) + \pi/2$,
$Wal(1,\theta,2) = Wal(1,\theta,1) - \pi/2$,
$Wal(2,\theta,1) = Wal(2,\theta,2) + \pi/4$,
$Wal(2,\theta,2) = Wal(2,\theta,1) - \pi/4$,
$Wal(3,\theta,1) = Wal(3,\theta,2) - \pi/2$,
$Wal(3,\theta,2) = Wal(3,\theta,1) + \pi/2$,
$Wal(3,\theta,3) = Wal(3,\theta,4) + \pi/8$,
$Wal(3,\theta,4) = Wal(3,\theta,3) - \pi/8$,

In the above analyzed, complete function system, due to *sin*-component extraction, we may obtain a subsystem of odd Walsh functions. Figure 6 shows time diagram charts for the odd Walsh function subsystem. Figure 7 shows graphs of *cos*-subsystem of even Walsh function.

Based on the above results, it can be stated that the Walsh function base is an advanced function system that allows the effective implementation of a functional analysis. However, the Walsh system is characterized by a relatively high functional redundancy due to the fact that the IT power of the function base is $P = N^2$. Today, more efficient systems are known as the Galois function, the transition to which and the creation of whose basic function systems is carried out by theoretical and numerical transformation of the Walsh base. A research perspective should be that after the analogy of Walsh function systems, arranged by well-known principles of by Walsh, Paley, and Hadamard, a new principle willl be introduced for the first time, i.e. recursive ordering of the Walsh function, on whose basis several new basic Walsh function systems will be created, which in turn are the basis for the synthesis of Galois function systems.

For the first time, the property of phase correlation of function components in pairs of the same order was established, which allowed their grouping in sub-systems of even type (*sin*-components) and odd (*cos*-component) functions. In systems of each type, we defined discrete-harmonic and discrete-irregular sub-functions. The study topic has an analytical character, explaining the new tested property of the phase correlation in the Walsh function system, and Gray and Rademacher functions in it, which in turn determines the direction of further research on the effectiveness in the application of these systems in functional analysis of IT processes and digital signal processing.

REFERENCES

[1] J.G. Proakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*, Pearson Education, 2007, 1156 p.

[2] S.W. Smith, *Digital Signal Processing: A Practical Guide for Engineers and Scientist*, Newnes, 2003, 650 p.

[3] R.E. Blahut, *Fast algorithms for digital signal processing*, Addison-Wesley Pub. Co., 1985, 441 p.

[4] M.G. Karpovskii, E.S. Moskalev, *Spectral Methods for Analysis and Synthesis of Discrete Tools,* Leningrad, Energiya, 1973, 144 p. (in Russian)

[5] H. Rademacher, Einige Satze von allgemeine Ortogonalfunktionen, *Math. Annalen,* N 87, 1922, pp. 122-138.

[6] R.E.A.C. Paley, A Remarkable Series of Ortogonal Funktions, *Proc. London Math. Soc.*, 1932, (2)34, pp. 241-279.

[7] J.L. Walsh, A closed set of ortogonal functions, *American Journal of Mathematics*, 1923, Vol. 45, pp. 5-24.

[8] A. Haar, Zur Theorie der ortogonalen Funktionsysteme, *Math. Ann.*, Vol. 69, 1910, pp. 331-371, Vol. 71, 1912, pp. 38-53.

[9] B. Gold, C.M. Rader, *Digital processing of signals*, McGraw-Hill, 1969, 269 p.

[10] A.V. Oppenheim, *Discrete-Time Signal Processing*, Pearson Education, 2006, 864 p.

[11] B.I. Golubov, A.V. Efimov, V.A. Skvorcov, *Walsh series and transformations: Theory and applications*, Moscow, Nauka, 1987, 343 p. (in Russian).

[12] L.A. Zalmanzon, *Fourier, Walsh and Haar transformations and their application in management, communications and other areas*, Moscow, Nauka, 1989, 496 p. (in Russian).

[13] L.V. Varichenko, V.G. Labunec, M.A. Rakov, *Abstract algebraic systems and digital signal processing*, Kiev, Naukova Dumka, 1986, 248 p. (in Russian).

[14] L.R. Rabiner, B. Gold, *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice Hall, 1975, p. 762.

[15] L.B. Petryshyn, *Digital messages processing in Galois basis*, Ivano-Frankivsk State Technical University of Oil and Gas, Ivano-Frankivsk, 1996, 89 p. (in Ukrainian).

[16] L.B. Petryshyn, *Theoretical bases for form transformation and information digital processing in Galois basis,* Kyiv, IZiMN MON, 1997, 237 p. (in Ukrainian).

[17] V.M. Mutter, *Bases of noise stable information telecast*, Moscow, Energoatomizdat, 1990, 288 p. (in Russian).