



ВПЛИВ ЧАСТОТНОГО ШУМУ НА РОБОТУ КВАНТОВОГО ВЕНТИЛЯ ФРЕДКІНА

Геннадій Горський, Віталій Дейбук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
вул. Коцюбинського 2, 58012, Чернівці, Україна,
e-mail: gena_grim@mail.ru, v.deibuk@chnu.edu.ua

Резюме: В статті розглянуто вплив розбалансу, в тому числі випадкового, частоти РЧМП на роботу квантового вентиля Фредкіна на ядерному магнітному резонансі. Показано, що розбаланс частот призводить до зниження ймовірності отримання правильного результату. Якщо замість однієї частоти генерується гаусова смуга частот, то зростання її ширини в цілому зменшує середню ймовірність правильної відповіді і збільшує стандартне відхилення цієї ймовірності.

Ключові слова: квантовий біт, квантовий регістр, квантовий комп'ютер, квантовий алгоритм, вентиль Фредкіна, спіні, модель Ізінга, гаусова смуга частот, ймовірність правильної відповіді, стандартне відхилення ймовірності.

1. ВСТУП

Надії науковців і практиків на квантовий комп'ютер в основному пов'язані з явищем так званого квантового паралелізму. Воно полягає в тому, що квантовий регістр (КР) довжиною n може знаходитись не в одному з 2^n можливих булевих станів, а відразу в усіх з однаковою ймовірністю 2^{-n} і обробляти одночасно 2^n двійкових слів, що істотно підвищує продуктивність. Квантовий комп'ютер (КвК) на відміну від класичного є ймовірнісним комп'ютером. Для нього втрачає силу теза Черча-Тьюринга, яка говорить, що перехід від одного типу обчислювальних машин до іншого не змінює складності задачі [1]. Це має місце тому, що задачі, які на класичних комп'ютерах розв'язуються за експоненціальний відносно довжини регістру час, на квантових комп'ютерах можуть бути розв'язані за поліномний час.

На сьогодні розв'язання питання про створення КвК перебуває на етапі розробки фундаментальних теоретичних та технологічних проблем. Розроблено два квантових алгоритми (КА): розкладання великих чисел на прості множники (Шора) та пошуку запису у великій неупорядкованій базі даних (Гровера). У зв'язку з цим квантові комп'ютери планується використовувати як для розв'язання NP-складних задач, так і в системах оперативного

пошуку даних у неіндексованих базах великого обсягу і в надсекретних лініях зв'язку з високим ступенем захищеності інформації, що передається або приймається [2,3].

Квантовий регістр (КР) може являти собою будь-яку систему квантово-тотожних об'єктів (квантових бітів, КвБ), кожен з яких може рівноймовірно з імовірністю 0.5 перебувати у двох станах, які чітко розрізняються за енергією. Тоді один з цих станів може бути ототожнений з логічним нулем (0) а інший – з логічною одиницею (1). Якщо квантовий біт являє собою атомне ядро, спіні якого може бути орієнтований за напрямком або проти напрямку сильного статичного магнітного поля (СМП), а перевертот спіну здійснюється слабким радіочастотним магнітним полем (РЧМП), то такий КК називається КК на ядерному магнітному резонансі (ЯМР) [4-6]. Одним з прикладів такого КК може слугувати КК на базі кремнію, в якому ядра ізотопу фосфору ^{31}P зі спінами $\frac{1}{2}$ знаходяться у зваженому стані у безспіновій матриці ^{28}Si [5].

Питання впливу статичного та динамічного шуму на коректну роботу алгоритму Гровера ЯМР квантового комп'ютера розглядалися в роботі [6]. Показано, що алгоритм Гровера більш чутливий до динамічного шуму і знайдені критичні параметри шуму.

Метою даної статті є числовий аналіз впливу

частотного шуму на роботу вентиля Фредкіна в ланцюжку з трьох ядер (ядерних спінів). Розглянуто три механізми виникнення частотного шуму, пов'язані з розбалансом частоти РЧМП.

Вентиль Фредкіна представляє собою вентиль контрольованого обміну. Він обмінює вміст контрольованих КвБ b і c , якщо контролюючий КвБ a знаходиться у стані логічної 1 і не робить цього в протилежному випадку. Якщо через a', b', c' позначити кінцеві стани зазначених вище КвБ, то таблиця істинності вентиля Фредкіна матиме наступний вигляд (див. табл. 1):

Таблиця 1. Таблиця істинності вентиля Фредкіна

a	b	c	a'	b'	c'
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

2. ОПИС ДИНАМІКИ СИСТЕМИ

Систему електронів або ядер зі спінами $\frac{1}{2}$ опишемо за допомогою квантового оператора Гамільтона моделі Ізінга [4], який має наступний вигляд:

$$H = H_0 + W, \quad (1)$$

де:

$$H_0 = -\hbar \left\{ \sum_{k=0}^2 \omega_k I_k^z + 2J [I_0^z I_1^z + I_1^z I_2^z + \alpha I_0^z I_2^z] \right\}, \quad (2)$$

$$W = -\frac{\hbar\Omega}{2} \sum_{k=0}^2 [I_k^+ \exp(i\omega t) + I_k^- \exp(-i\omega t)]. \quad (3)$$

Тут враховані обмінні взаємодії як між найближчими, так між другими сусідніми спінами.

Оператор (1) при врахуванні (2) і (3) визначає поведінку системи взаємодіючих спінів у магнітному полі $B = (b \cos \omega t, -b \sin \omega t, B(z))$, де b та ω – амплітуда та частота РЧМП відповідно, $B(z)$ – залежна від координати z індукція статичного магнітного поля (СМП). Окрім того у

формулах (2) і (3) I_k^z – оператори проекції k -го спіну на вісь z , $I_k^\pm = I_k^x \pm iI_k^y$ – так звані оператори підвищення і пониження [3], $\omega_k = \gamma B(z_k)$ – Ларморові частоти прецесії спінів, $\Omega = \gamma b$ – частоти осциляцій Рабі, γ – гіромагнітний фактор протона або електрона, J – стала обмінної взаємодії між найближчими сусідами, $\alpha = J'/J$ – відносний внесок обмінної взаємодії других сусідів (J'), \hbar – стала Планка, поділена на 2π .

В аналізованій квантовій системі ланцюжка трьох спінів реалізація будь-якого КА – це не що інше, як перерозподіл ймовірностей реалізації між базисними станами системи, що характеризуються трибітовими двійковими наборами, яких є усього 8 з номерами від 0 до 7. Цей перерозподіл відбувається під впливом РЧМП. В силу повноти системи базисних станів $|k\rangle$ довільний стан системи можна подати їх лінійною комбінацією:

$$\Psi(t) = \sum_{k=0}^7 C_k(t) |k\rangle. \quad (4)$$

Хвильові функції базисних станів $|k\rangle$ є власними функціями оператора H_0 :

$$H_0 |k\rangle = E_k |k\rangle. \quad (5)$$

Якщо кожному номеру стану $|k\rangle$ поставити у відповідність його двійкове зображення $(i_2 i_1 i_0)$, де i_k приймає значення 0 або 1, то власні енергії базисних станів аналізованої системи визначаються формулою:

$$E_{i_2 i_1 i_0} = -\frac{\hbar}{2} \left\{ (-1)^{i_2} \omega_2 + (-1)^{i_1} \omega_1 + (-1)^{i_0} \omega_0 + J [(-1)^{i_0+i_1} + (-1)^{i_1+i_2} + \alpha (-1)^{i_0+i_2}] \right\}. \quad (6)$$

Діаграму енергетичних рівнів аналізованої восьмирівневої системи з переходами, які відповідають за роботу вентиля Фредкіна, зображено на рис.1.

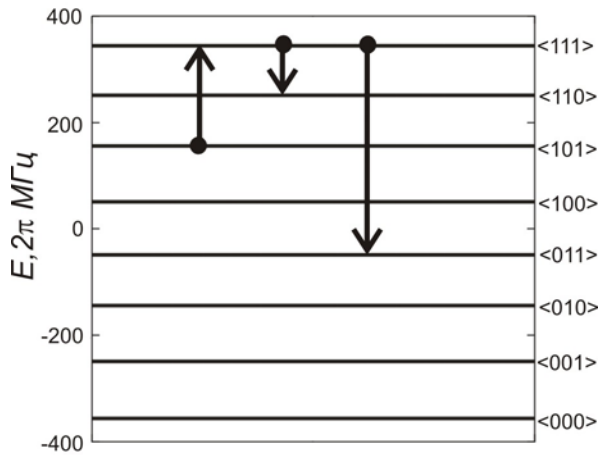


Рис. 1 – Діаграма енергетичних рівнів аналізованої системи із зображенням дозволених переходів, які відповідають за роботу вентиля Фредкіна за алгоритмами $5 \rightarrow 7 \rightarrow 6$ ($101 \rightarrow 111 \rightarrow 110$) і $5 \rightarrow 7 \rightarrow 3$ ($101 \rightarrow 111 \rightarrow 011$)

При побудові діаграми взято такі параметри аналізованої системи в одиницях $2\pi \text{ МГц}$: $\omega_0 = 100, \omega_1 = 200, \omega_2 = 400, J = 5, \alpha = 0.02$.

Динаміка цієї системи під впливом залежного від часу збурення (РЧМП) описується нестационарним рівнянням Шредінгера (НРШ):

$$\frac{i\hbar \partial \Psi}{\partial t} = H\Psi. \quad (7)$$

Беручи до уваги розклад (4), останнє рівняння еквівалентне системі 8-ми рівнянь з вісьмома комплексними невідомими C_m ($m = 0 \dots 7$):

$$i\hbar \dot{C}_m = E_m C_m + \sum_{n=0}^7 W_{mn}(t) C_n, \quad (8)$$

де $W_{mn}(t)$ – матричний елемент оператора збурення (3), обчислений на хвильових функціях базисних станів. Для аналізованої системи матриця $W(t)$ має таку структуру:

$$W(t) = -\frac{\hbar \Omega}{2} \begin{pmatrix} 0 & z^* & z^* & 0 & z^* & 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & z^* & 0 & z^* & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & z^* & 0 & 0 & z^* & 0 \\ 0 & z & z & 0 & 0 & 0 & 0 & z^* \\ z & 0 & 0 & 0 & 0 & z^* & z^* & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & z & 0 & 0 & z^* \\ 0 & 0 & z & 0 & z & 0 & 0 & z^* \\ 0 & 0 & 0 & z & 0 & z & z & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

де $z = \exp(i\omega t)$, а зірочка означає комплексне

спряження. Така структура даної матриці зумовлена тим, що дозволеними є лише переходи з переворотом якого-небудь одного зі спінів.

Для спрощення (8) перейдемо до системи відліку, пов'язаної зі спінами, які прецесують у СМП, тобто представимо коефіцієнти C_m у вигляді:

$$C_m = D_m \exp(-iE_m t \hbar^{-1}), \quad (10)$$

Тоді система рівнянь (8) перетворюється на таку систему рівнянь для D_m ($m = 0; 1 \dots 7$):

$$\dot{D}_m = \sum_{n=0}^7 T_{mn}(t) D_n, \quad (11)$$

причому матричні елементи $T_{mn}(t)$ визначаються так:

$$T_{mn}(t) = -\frac{i}{\hbar} W_{mn}(t) \exp(i\omega_{mn} t) \quad (12)$$

де

$$\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar}. \quad (13)$$

Систему рівнянь (11) можна записати в матричній формі так:

$$\dot{D} = T(t)D. \quad (14)$$

Формальний розв'язок матричного рівняння (14) можна записати у вигляді:

$$D(t) = D(0) \exp\left(\int_0^t T(t) dt\right). \quad (15)$$

Програму числового інтегрування системи (14) у відповідності з (15) розроблено і реалізовано в середовищі MathCAD-14 з використанням можливості аналітичного запису інтегралу від матриці $T(t)$. Експонента ж обчислюється шляхом розкладу в ряд Тейлора по показнику, причому кількість членів береться така, щоб забезпечити виконання умови нормування $\sum_{m=0}^7 |D_m|^2 = 1$ з точністю до 10^{-13} .

3. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ЇХ ОБГОВОРЕННЯ

Спочатку розглянемо роботу вентиля Фредкіна на чистих “цифрових” станах. Нехай початковий номер двійкового набору буде 5 (101). Тоді в залежності від того, перший чи третій КвБ буде контролюючим, ми можемо отримати відповідь 6 (110) або 3 (011). Однак прямі переходи 5→6 і 5→3 заборонені, оскільки при них відбуваються перевороти одразу двох спінів. Дозволені є двостадійні переходи через проміжний стан 7 (111), тобто 5→7→6 або 5→7→3. В такому випадку дія вентиля Фредкіна еквівалентна дії двох вентилів Тоффолі за умови, що обмінювані КвБ мають завідомо різний вміст. Вентиль Тоффолі – це вентиль подвійно контрольованого заперечення. Він заперечує вміст контрольованого КвБ c , якщо обидва контролюючі КвБ a і b знаходяться в стані логічної 1 і не робить цього в усіх інших випадках.

Зауважимо тепер, що для здійснення будь-якого дозволеного переходу з “цифрового” стану з номером L у “цифровий” стан з номером M необхідно настроїти РЧМП у резонанс, тобто вибрати $\omega = |\omega_{LM}|$. В цьому випадку при будь-яких параметрах системи основний вклад до інтегралу у формулі (15) дають “резонуючі” елементи матриці $T(t)$, тобто $T_{LM}(t)$ і $T_{ML}(t)$. Інтеграли ж по часу від решти елементів близькі до нуля. Експонента від такої “розрідженої” матриці обчислюється явно. Враховуючи, що ймовірності реалізації базисних станів дорівнюють квадратам модулів елементів матриці $D(t)$, остаточно отримаємо такі залежності ймовірностей реалізації станів L і M від часу:

$$P_L(t) = \cos^2 \frac{\Omega t}{2}. \quad (16)$$

$$P_M(t) = \sin^2 \frac{\Omega t}{2}. \quad (17)$$

З формул (16) та (17) видно, що протягом так званого π -імпульсу, тривалість якого $t_0 = \pi/\Omega$, ймовірність реалізації початкового “цифрового” стану з номером L плавно спадає від 1 до 0, а ймовірність реалізації кінцевого “цифрового” стану з номером M плавно зростає від 0 до 1. Такі ж результати дає і числове моделювання

при раніше зазначених параметрах аналізованої системи і частоті Рабі $\Omega = 0.1$ (в тих же одиницях). Таким чином на чистих “цифрових” станах за умови настроювання РЧМП на кожній стадії в резонанс, вентиль Фредкіна чітко, тобто з імовірністю 1, спрацьовує за два π -імпульси.

Вплив навколишнього середовища або неточності задання магнітного поля на розглядувану систему приведе до виникнення шуму, що в свою чергу може викликати розбалансування як частот прецесії спінів у статичному магнітному полі ω_k , так і ларморової частоти Рабі Ω динамічного магнітного поля (РЧМП), а також його резонансної частоти. В даній статті ми розглядатимемо вплив такого частотного шуму, при якому неточно задається резонансна частота РЧМП ω .

При цьому врахуємо такі механізми розбалансу: 1) неточне настроювання частоти генератора РЧМП; 2) неконтрольований зсув енергетичних рівнів системи спінів за рахунок впливу на неї зовнішнього середовища; 3) скінчена ширина спектральної смуги генерованого керуючого сигналу.

В першому випадку у матрицю $T(t)$ в якості частоти РЧМП підставимо при заданих L та M величину $\omega = |\omega_{LM}|(1 + \eta_1)$, де η_1 – відносна похибка настроювання генератора. Залежність імовірності P коректного спрацювання вентиля Фредкіна від η_1 зображено на рис.2.

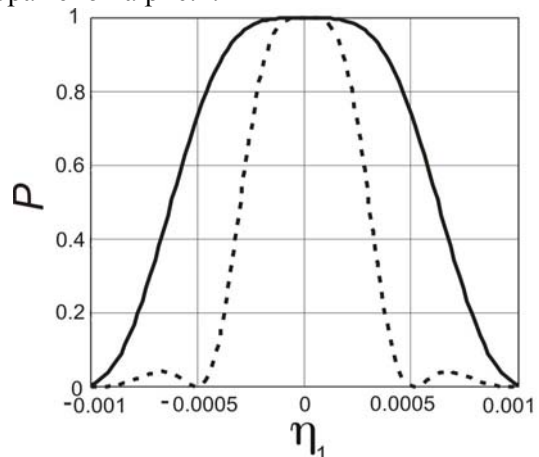


Рис. 2 – Залежність імовірності коректного спрацювання вентиля Фредкіна від похибки η_1 настроювання частоти генератора для переходів 5→7→6 (суцільна крива) і 5→7→3 (пунктирна крива)

З рис.2 видно, що ймовірність правильної відповіді є парною функцією відносно похибки настроювання частоти генератора η_1 і досить швидко спадає при зростанні її модуля. При цьому для переходу $5 \rightarrow 7 \rightarrow 3$ цей спад різкіший, ніж для переходу $5 \rightarrow 7 \rightarrow 6$, тому що на шкалі енергій віддаль $5 \rightarrow 3$ більша за віддаль $5 \rightarrow 6$. В дослідженому діапазоні відносних похибок $-10^{-3} \leq \eta_1 \leq 10^{-3}$ імовірність коректного спрацювання вентиля Фредкіна має не лише головний максимум при $\eta_1 = 0$, який дорівнює 1, але й два побічних максимуми. Останні для переходу $5 \rightarrow 7 \rightarrow 3$ досягаються при $\eta_1 \approx \pm 6.6 \cdot 10^{-4}$ і дорівнюють 0.043. Для переходу $5 \rightarrow 7 \rightarrow 6$ в дослідженому діапазоні η_1 побічних максимумів немає. Імовірність коректного спрацювання вентиля Фредкіна спадає від 1 до 0.5 при $\eta_1 \approx \pm 6.2 \cdot 10^{-4}$ для переходу $5 \rightarrow 7 \rightarrow 6$ і при $\eta_1 \approx \pm 3 \cdot 10^{-4}$ для переходу $5 \rightarrow 7 \rightarrow 3$. Зазначені відмінності зумовлені тим, що енергетична відстань $5 \rightarrow 3$ більша за енергетичну відстань $5 \rightarrow 6$.

У другому випадку змодельюємо зсув енергетичних рівнів аналізованої системи спінів так. Будемо вважати, що найнижчий енергетичний рівень, який відповідає стану з номером 0 не зсувається, а кожен вищий рівень зсувається на одну і ту ж відносну частку η_2 відстані між ним і нижчим рівнем незбуреної системи, тобто справедливі рівності

$$\Delta_0 = 0, \quad (17)$$

$$\Delta_{k+1} = \eta_2 (E_{k+1} - E_k), k = 0 \dots 6. \quad (18)$$

Оскільки зсув ми вважаємо неконтрольованим, то частоту РЧМП будемо вважати такою, якою вона повинна бути за відсутності зсуву енергетичних рівнів. Залежність імовірності P коректного спрацювання вентиля Фредкіна від η_2 в діапазоні $-0.01 \leq \eta_2 \leq 0.01$ для цього випадку зображено на рис. 3.

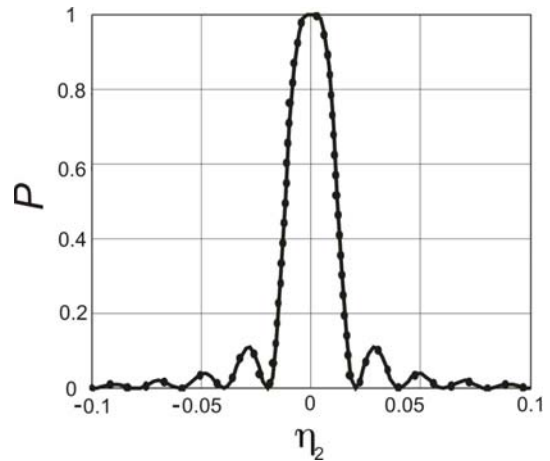


Рис. 3 – Залежність імовірності коректного спрацювання вентиля Фредкіна від відносного зсуву η_2 енергетичних рівнів системи спінів для переходів $5 \rightarrow 7 \rightarrow 6$ (суцільна крива) і $5 \rightarrow 7 \rightarrow 3$ (точкова крива)

З рис.3 видно, що для обох переходів імовірності коректного спрацювання вентиля Фредкіна залежать від відносного зсуву енергетичних рівнів системи спінів однаково і ці залежності мають ряд побічних максимумів. В обох випадках імовірність коректного спрацювання вентиля Фредкіна спадає від 1 до 0.5 при $\eta_2 \approx \pm 0.012$, а перші побічні максимуми досягаються при $\eta_2 \approx \pm 0.028$ і дорівнюють 0.111. Окрім того з порівняння рисунків 2 і 3 видно, що принаймні в рамках розглянутих моделей зсув енергетичних рівнів системи впливає на ймовірність коректного спрацювання вентиля Фредкіна значно меншою мірою, ніж розбаланс частоти генератора РЧМП. Однак це вірно лише тоді, коли можна знехтувати уширенням енергетичних рівнів, зумовленим дисипативними процесами взаємодії системи спінів з оточенням. Якщо ж це уширення велике, стають істотними процеси декогерентизації [1], внаслідок яких електронні або ядерні спіни можуть відігравати роль КвБ лише протягом дуже малих проміжків часу. Це примушує застосовувати для керування системою дуже короткі імпульси і вводити для складних КА процедури проміжної корекції результатів.

У третьому випадку, коли розбалансування частоти зумовлено скінченною шириною спектральної смуги керуючого сигналу, замість частоти РЧМП підставимо величину:

$$\omega = |\omega_{LM}| Ga(1, \eta_3), \quad (19)$$

де $Ga(1, \eta_3)$ – функція генерування випадкових

чисел, розподілених за нормальним законом з центром 1 і стандартним відхиленням (СтВ) η_3 , яке характеризує відносну ширину спектральної смуги керуючого сигналу. Для цього випадку обчислена середня по ансамблю з 20 реалізацій імовірність P коректного спрацювання вентиля Фредкіна і СтВ S цієї ймовірності в залежності від η_3 окремо для переходів $5 \rightarrow 7 \rightarrow 6$ і $5 \rightarrow 7 \rightarrow 3$. Результати обчислень в діапазоні $0 \leq \eta_3 \leq 0.01$ представлено на рис. 4,5.

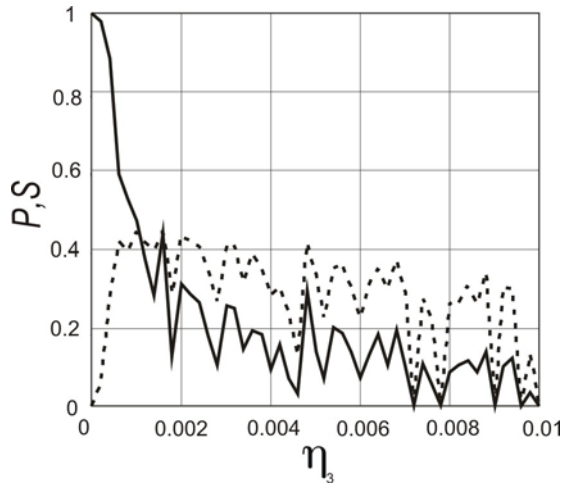


Рис. 4 – Залежність середньої ймовірності P коректного спрацювання вентиля Фредкіна (суцільна крива) і її СтВ S (пунктирна крива) від відносної ширини η_3 спектральної смуги керуючого сигналу для переходу $5 \rightarrow 7 \rightarrow 6$

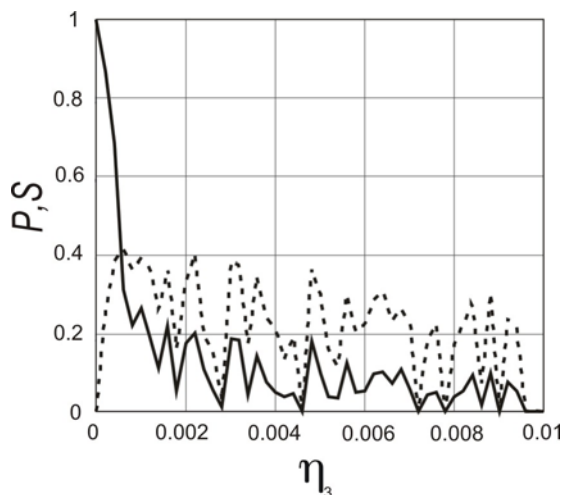


Рис. 5 – Залежність середньої ймовірності P коректного спрацювання вентиля Фредкіна (суцільна крива) і її СтВ S (пунктирна крива) від відносної ширини η_3 спектральної смуги керуючого сигналу для переходу $5 \rightarrow 7 \rightarrow 3$

З рис. 4,5 видно, що в цілому при зростанні ширини спектральної смуги керуючого сигналу середня ймовірність коректного спрацювання вентиля Фредкіна має тенденцію до зниження, а її СтВ – до зростання. Для переходу $5 \rightarrow 7 \rightarrow 6$ СтВ середньої ймовірності практично зрівнюється з самою середньою ймовірністю при $\eta_3 \approx 1.6 \cdot 10^{-3}$, а для переходу $5 \rightarrow 7 \rightarrow 3$ це відбувається при $\eta_3 \approx 5 \cdot 10^{-4}$. Далі в обох випадках СтВ середньої ймовірності перевищує її саму за винятком тих значень η_3 , при яких обидві ці величини дорівнюють нулеві. Звідси видно, що коректність і стабільність функціонування вентиля Фредкіна істотно залежать від ступеня монохроматичності керуючого сигналу на кожному кроці КА. Для реальних немонохроматичних сигналів необхідні процедури проміжної корекції результатів.

Відмінність характеру кривих на рис.4 і 5 в основному зумовлена двома факторами: різною кількістю і розташуванням побічних максимумів на кривих частотної залежності середньої ймовірності коректного спрацювання вентиля Фредкіна для переходів $5 \rightarrow 7 \rightarrow 6$ і $5 \rightarrow 7 \rightarrow 3$ та різними енергетичними відстанями між початковим і кінцевим станами аналізованої системи.

4. ВИСНОВКИ

Таким чином, у статті досліджено вплив різних механізмів розбалансу частоти керуючого сигналу на коректність спрацювання квантового вентиля Фредкіна на ЯМР. При цьому показано, що ймовірність коректного спрацювання вентиля Фредкіна як функція відносного розбалансу частоти керуючого сигналу має не лише головний максимум, що дорівнює одиниці при нульовому розбалансі, але й ряд побічних максимумів, істотно менших за величиною. При цьому відносна ширина основного максимуму для переходу $5 \rightarrow 7 \rightarrow 6$ істотно менша, ніж для переходу $5 \rightarrow 7 \rightarrow 3$, що пояснюється більшою енергетичною відстанню між станами 5 і 3 порівняно з відстанню між станами 5 і 6.

Також показано, що відносний неконтрольований зсув енергетичних рівнів системи за рахунок взаємодії з оточенням (принаймні в рамках розглядуваної моделі зсуву) впливає на ймовірність коректного спрацювання вентиля Фредкіна значно меншою мірою, ніж відносний розбаланс частоти керуючого сигналу, причому цей вплив для переходів $5 \rightarrow 7 \rightarrow 6$ та $5 \rightarrow 7 \rightarrow 3$ однаковий. Однак це вірно лише тоді, коли уширенням енергетичних рівнів системи внаслідок дисипативних процесів взаємодії з

оточенням можна знехтувати.

Поряд з цим встановлено, що кінцева ширина спектральної смуги керуючого сигналу істотно зменшує ймовірність коректного спрацювання вентиля Фредкіна та збільшує її СтВ. Так вже при відносній ширині смуги $\eta \approx (5 \div 16) \cdot 10^{-4}$ середня ймовірність коректного спрацювання вентиля Фредкіна і її стандартне відхилення зрівнюються між собою. З цього випливає, що для керування системою електронних або ядерних спінів як квантовим регістром необхідно використовувати високомонохроматичні РЧ сигнали і задавати їх з високою точністю. Окрім того для складних алгоритмів слід використовувати процедури проміжної корекції результатів.

5. СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] К. А. Валиев. Квантовые компьютеры и квантовые вычисления, *УФН*, 2005, 175 (1), с. 3-39
- [2] Д. Бауместер, А. Эккерт, А. Цайлингер. *Физика квантовой информации*. Постмаркет. Москва, 2002. с. 33.
- [3] М. А. Nilsen, I. L. Chuang. *Quantum computation and quantum information*. University Press. New York – Cambridge, 2001. pp. 50-51.
- [4] G. V. Lopez, L. Lara. Numerical simulation of controlled-controlled-not (CCN) quantum gate in a chain of three interacting spins system, *J. Phys. B: At. Opt. Mol. Phys.* 2006, 39 (9), pp. 3897-3904.
- [5] В. Kane. A silicon-based nuclear spin quantum computer, *Nature*, 1998, 398 (5), pp. 133-137.
- [6] T. Gorin, L. Lara, G. V. Lopez. Simulation of static and random errors on Grover's search algorithm implemented in a Ising nuclear spin chain quantum computer with few qubits. *arXiv.org*. - 0902.0471v2 [quant-ph]



Геннадій Горський, магістр, здобувач кафедри "Комп'ютерні системи та мережі" Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Стаж наукової діяльності 2 роки. Автор 8-ми наукових праць з проблем квантової інформатики та функціональної електроніки.

Наукові інтереси – комп'ютерна схемотехніка, мікроелектроніка, функціональна електроніка, проблеми квантової інформатики.



Віталій Дейбук, професор, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри "Комп'ютерні системи та мережі" Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Стаж педагогічної діяльності у вищій школі 25 років. Автор понад 150 наукових та науково-педагогічних праць, в тому числі 2 навчальних посібники з грифом Міністерства освіти України.

Наукові інтереси – комп'ютерне моделювання фізичних властивостей конденсованих систем, проблеми квантової інформатики, дослідження властивостей матеріалів для квантових комп'ютерів.

FREQUENCY NOISE INFLUENCE ON FUNCTIONING OF FREDKIN QUANTUM GATE

Gennadiy P. Gorskyi, Vitaliy G. Deibuk

Chernivtsi National University,
 2 Kotsubins'kogo Str., 58012, Chernivtsi, Ukraine,
 e-mail: gena_grim@mail.ru, v.deibuk@chnu.edu.ua

Abstract: *The influence of detuning of radio frequency magnetic field (RFMF) on the functioning of nuclear magnetic resonance (NMR) quantum Fredkin gate is considered in this paper. It is shown that detuning of frequency decreases a probability of correct answer. If the spectral broadband of RFMF signal is increasing, then the main value of correct answer probability is decreasing too and standard deviation of this probability is increasing.*

Keywords: *quantum bit, quantum register, quantum computer, quantum algorithm, spin, Ising model, Gaussian frequency band, correct answer probability, probability standard deviation.*

The hopes of scientist and experts to quantum computer (QC) lay in quantum parallelism phenomenon [1,2]. Quantum bit (QB) in contrast to classic one may be simultaneously in two states: logical 0 and logical 1 with equal probabilities. Quantum n-tuple register may keep and process 2^n binary words simultaneously. In this sense every quantum algorithm (QA) is the sequence of allowed quantum transitions between probable quantum register Boolean states. Now two QAs are developed: Grover's database search algorithm and Shore's big integer numbers factorization algorithm [3].

QB may be represented by every quantum object with two quantum states, which are sharply separated in energies. If QBs are interacting electron or nuclear spins in strong constant magnetic field (CMF) and RFMF, that is QC on NMR.

The aim of this paper is investigation of RFMF detuning influence on Fredkin quantum gate functioning in chain of three nuclear or electron spins $\frac{1}{2}$ in Ising model framework. Fredkin gate swaps two controlled bits if controlling bit is in logical 1 state and does not swapping in opposite case.

Evolution of three spins system has been investigated by the model Hamiltonian [4]:

$$H = H_0 + W, \quad (1)$$

where:

$$H_0 = -\hbar \left\{ \sum_{k=0}^2 \omega_k I_k^z + 2J [I_0^z I_1^z + I_1^z I_2^z + \right.$$

$$\left. + \alpha I_0^z I_2^z \right\}, \quad (2)$$

$$W = -\frac{\hbar\Omega}{2} \sum_{k=0}^2 [I_k^+ \exp(i\omega t) + I_k^- \exp(-i\omega t)]. \quad (3)$$

The Hamiltonian describes the behavior of three interacting spins system in magnetic field $B = (b \cos \omega t, -b \sin \omega t, B(z))$, where b and ω are amplitude and frequency of RFMF respectively, $B(z)$ – z -coordinate dependent CMF induction, I_k^z – projection of k -th spin on z -axis, $\omega_k = \gamma B(z_k)$ – Larmore's precession frequencies for corresponding spins, γ – proton or electron gyromagnetic ratio, J – exchange interaction constant for nearest neighbors, α – relative exchange interaction for second neighbors, I_k^\pm – so called “descend” and “ascend” operators, $\Omega = \gamma b$ – Rabi's frequency, \hbar – Plank's constant, divided by 2π .

Analyzed system has eight basic states, which may be numbered by binary numbers from 0 to 7. Evolution of the system may be described by time-dependent Schrödinger equation (TDSE), which may be represented in such matrix form:

$$\dot{D} = T(t)D, \quad (4)$$

where D – unknown time-dependent matrix of basic functions expansion coefficients for system wave function. The time-dependent matrix $T(t)$ has

the form:

$$T_{mn}(t) = -\frac{i}{\hbar} W_{mn}(t) \exp(i\omega_{mn}t), \quad (5)$$

where matrix $W(t)$ has the form:

$$W(t) = -\frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} 0 & z^* & z^* & 0 & z^* & 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & z^* & 0 & z^* & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & z^* & 0 & 0 & z^* & 0 \\ 0 & z & z & 0 & 0 & 0 & 0 & z^* \\ z & 0 & 0 & 0 & 0 & z^* & z^* & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & z & 0 & 0 & z^* \\ 0 & 0 & z & 0 & z & 0 & 0 & z^* \\ 0 & 0 & 0 & z & 0 & z & z & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$z = \exp(i\omega t)$ and asterisk defines the complex conjugation. Numbers ω_{mn} may be defined as:

$$\omega_{mn} = \frac{1}{\hbar} (E_m - E_n). \quad (7)$$

If $(i_2 i_1 i_0)$ is binary representation of number $m (m = 0 \dots 7)$, then corresponding eigenvalues of energy E_m may be defined as:

$$E_{i_2 i_1 i_0} = -\frac{\hbar}{2} \left\{ (-1)^{i_2} \omega_2 + (-1)^{i_1} \omega_1 + (-1)^{i_0} \omega_0 + J \left[(-1)^{i_0+i_1} + (-1)^{i_1+i_2} + \alpha (-1)^{i_0+i_2} \right] \right\}. \quad (8)$$

Formal solution of (4) may be represented as:

$$D(t) = D(0) \exp\left(\int_0^t T(t) dt \right). \quad (9)$$

Time-dependend probabilities of realization for every probable state m of the system may be defined as $|D_m(t)|^2$.

If we want to analyze the transition between L and M states we must put in to $T(t)$ "resonant" RFMF frequency value $\omega = |\omega_{LM}|$. For Fredkin gate numerical simulation we considered the transition sequences $5 \rightarrow 7 \rightarrow 6$ and $5 \rightarrow 7 \rightarrow 3$ because only quantum transitions with inversion of one bit are allowed. System parameters are (in units 2π MHz): $\omega_0 = 100, \omega_1 = 200, \omega_2 = 400, J = 5, \alpha = 0.02, \Omega = 0.1$. It was shown, that Fredkin gate without

detuning acts sharply during two π -pulses, which duration is π/Ω , i.e. probability of final state realization becomes equal to 1. For detuning analysis we considered three detuning mechanisms: i) RFMF frequency tuning error, when $\omega = |\omega_{LM}|(1 + \eta_1)$, where η_1 is relative detuning; ii) non-controlled pure shift of system energy levels Δ_i due to interaction of the system with environment, when $\Delta_0 = 0, \Delta_k = \eta_2(E_k - E_{k+1})$ for $k = 1 \dots 7$, where η_2 is relative shift; iii) finite broad of signal spectrum, when $\omega = |\omega_{LM}|Ga(1, \eta_3)$, where $Ga(1, \eta_3)$ – normally distributed random numbers with centre 1 and standard deviation η_3 . In case i) the correct answer probability becomes equal to 0.5 if $|\eta_1| \approx 6.2 \cdot 10^{-4}$ for sequence $5 \rightarrow 7 \rightarrow 6$ and if $|\eta_2| \approx 3 \cdot 10^{-4}$ for sequence $5 \rightarrow 7 \rightarrow 3$. Such difference occurs because the energy interval $5 \rightarrow 6$ is less then $5 \rightarrow 3$ one. In this case the correct answer probability for both sequences has not only leading maximum at $\eta_1 = 0$, but also side maximums. In case ii) the correct answer probability becomes equal to 0.5 if $|\eta_2| \approx 0.012$ for both sequences. For this case correct answer probability has side maximums too. In case iii) the main probability of correct answer becomes equal to its standard deviation at $\eta_3 \approx 5 \cdot 10^{-4}$ for sequence $5 \rightarrow 7 \rightarrow 6$ and at $\eta_3 \approx 1.6 \cdot 10^{-3}$ for sequence $5 \rightarrow 7 \rightarrow 3$. In last case we considered the ensemble of 20 realizations of Fredkin quantum gate action.

We can conclude that probability of correct answer for Fredkin quantum gate is very sensitive to RFMF frequency detuning. Therefore for complicated algorithms the interim results correction procedures are required.

REFERENCES

- [1] K. A. Valiev. Quantum computers and quantum computations, *UNF*, 2005, 175 (1), pp. 3-39. (in Russian)
- [2] D. Bouwmeester, A. Ekert, A. Zeilinger. *The Physics of Quantum Information*. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg, 2000, pp. 33.
- [3] M. A. Nilsen, I. L. Chuang. *Quantum computation and quantum information*. University Press. New York – Cambridge, 2001, pp. 50-51.
- [4] G. V. Lopez, L. Lara. Numerical simulation of controlled-controlled-not (CCN) quantum gate in a chain of three interacting spins system, *J. Phys. B: At. Opt. Mol. Phys.* 2006, 39 (9), pp. 3897-3904.